

# 数学教育現代化期における「教材としての幾何の公理系」の 取り扱い方

— 教科書と参考書の記述の分析 —

山本 忠

## Treatment of the Geometric Axiom System as Teaching Materials during the Period of Modernization of Mathematics Education —An Analysis of the Descriptions in Several Textbooks and Reference Books

Atsushi YAMAMOTO

### 抄 録

昭和45年告示学習指導要領の高等学校数学ⅡBにおける「平面幾何の公理的構成」は、数学教育現代化の潮流の基に作成されたものである。数学教育現代化のねらいの一つは、現代数学の考え方を初等・中等教育に導入することであった。したがって、教科書や参考書は現代数学的な公理的構成を取り入れた。その結果、当時の実践記録によれば受容困難な場合が多くあった。たとえば「わかりきったことをなぜ証明しなくてはいけないのか」、「教科書と参考書では公理が異なっているので心配」など、生徒の反応は否定的なものが多かった。そこで、教科書、参考書の公理の異同、表現の異同、多様性、合同の公理の扱い方などの項目を設定して、当時使用された教科書、参考書の記述を数量化Ⅲ類の手法で分析した。結果は各教材によるばらつきは大きいことが裏付けられた。そして各教科書は比較的類似性があったものの、教科書と参考書の距離は遠いものがあり、当時指摘されていた生徒の不安も裏付けられた。

キーワード：幾何教育、公理的構成、幾何の公理系、数学教育現代化（3～5個）

### はじめに

小学校の算数科の図形教材においては「わけをいう」、すなわち、子どもなりの言葉で理由を考えたり、表現したりすることがある。算数科の場合は、紙を切って図形を作り、重ねてみるなどの具体物操作により理由を見つける算数的活動を行う。このような経験が中学校の証明指導につながってゆくのである。中学校では、実際の図形をノートに描いて、それを観察することによって直観的に理解することから、証明するという論理につながる。高等学校では、さらに複雑な図形を扱うことになる。そして、理由を遡ってゆくと公理にまで到達せざるを得ない。幾何の公理は、小学校の算数科から始まる図形指導の集大成としての理論構成となるはずなのである。現段階では、平成30年告示の高等学校の数学Aには初等幾何教材が含まれるものの、公理という用語が存在しない。（文部科学省（2018））しかし、昭和45年告示の高等学校数

学科学習指導要領の数学ⅡBには、「平面幾何の公理的構成」という単元が存在したのである。(文部省(1970))そして、この学習指導要領は数学教育現代化運動の潮流に沿って構成されていた。よって、平面幾何の学習は伝統的なEuclid幾何の方法ではなく、現代的なHilbert流の公理に沿って学習することが求められた。なぜなら、数学教育現代化運動は現代数学の方法・内容の一部を初等・中等教育へ導入するというのが主要な目的であったからである。ところが第4節で示すように、平面幾何の公理的構成は生徒にとって受容困難な場合が多いことが報告されている。本稿ではその受容困難な要因を分析し、公理を含む初等幾何教育への示唆を得る。

## 1. 数学教育現代化運動と幾何教育現代化の関係

わが国では明治初期から終戦まで中等学校において、算術、代数、三角法とともに初等幾何が教えられていた。(佐藤良一郎(1979)、pp.73-76)戦後も新制高等学校では、昭和22年告示(23年改正)の学習指導要領で、高等学校第三学年に幾何5単位が明記されている。その後昭和31年告示(33年再訂)の学習指導要領高等学校では、数学Ⅰが代数分野と幾何分野に分かれて明記され、数学Ⅰの教科書は代数編と幾何編の2冊が発行された。ところが、昭和35年告示の学習指導要領高等学校では、初等幾何は立体幾何のみとなった。平面幾何は中学校に移ったのである。

そして、数学教育現代化期においては、Euclid幾何のような非近代的な初等幾何は排除されるべきであるとの主張が強く打ち出された。実際、1959年にフランスのRoyaumontで行われたOEEC主催のセミナー“New Thinking in School Mathematics”において、第1分科会における議長であるJ. Dieudonnéは、「私の考えを一言で言うなら“Euclid must go!”である」と提案したのである。(佐々木元太郎(1966) p.215) Dieudonnéは、N.Bourbakiの構成員である。Bourbakiとは集合、構造、写像といった現代的な表現により数学全体を再構築する研究をしていた数学者集団の筆名である。彼の立場から推測すると、数学教育現代化のためには、集合、構造、写像が重要なものであって、幾何は不要であるとの主張に思える。しかし実際はDieudonnéの提案は幾何をすべて放逐することを意味していなかった。すなわち、解析幾何と変換幾何に比重を移すべきであるという主張であった。“Euclid must go!”の発言は、数学教育現代化運動に影響を与え、初等幾何に替わって変換幾何のように代数化された現代的な幾何教材を開発するべきであるとの認識が一般的となった。実際、1963年のOECD主催のアテネにおける数学教育会議の報告書には「この時点で中等学校の幾何教育でユークリッド的総合幾何はなくなり(括弧注釈略)、ベクトルかアフィンのアプローチがとって代わっている」(佐々木元太郎(1979a)、p.165)と記載されている。また、世界の大勢としては「ユークリッド総合幾何の公理的展開による指導は、各国の幾何教育からは漸次姿を消しつつある方向にある」(佐々木元太郎(1979b)、p.2)すなわち、西欧では数学教育現代化の潮流で主張されたのは、初等幾何ではなくベクトルと行列を使う変換幾何の導入である。

ただし、アメリカは例外であり、現代化プログラムであるCEEB(College Entrance Examination Board)、MSG(School Mathematics Study Group)では総合幾何の公理的な展開を導入している。(佐々木元太郎(1979b)、p.2-3)

このような状況の中で、昭和45年告示の高等学校学科学習指導要領の数学ⅡBにおいて「平面幾何の公理的構成」が明記された。その目的は「平面幾何について、数学における公理の意

味と公理的構成について理解させる。」であった。内容としては「公理、定義および定理の意味、平面幾何の構成」であり、用語としては「公理」のみが示されたのである。(文部省(1970)) この学習指導要領は数学教育現代化運動の世界的な潮流に沿って作成された。学習指導要領の意味する「平面幾何」とは初等幾何、すなわちEuclid幾何である。それは、座標を導入する「解析幾何」でもなく、ベクトルと行列を基にした代数化された「変換幾何」でもなかった。つまり、初等幾何とは代数計算ではなく、直観を頼りに図形を研究する分野である。あえて初等幾何を現代化期に導入した理由は、次節で述べる。

## 2. 平面幾何の公理的構成の導入の背景

前節冒頭で述べたように、学習指導要領で示されているのは「公理の意味と公理的構成について理解させる。」ことであり、「無定義用語」について言及することへの指示は記載されていない。しかし、表2で示すように各社の教科書の多くが無定義用語に言及している。数学教育現代化期には新規教材の導入がなされたため、文部省は昭和43年度から5年計画で「数学教育現代化講座」という現職教員向けの研修会を開催している。その研修会資料(文部省(1971)、改訂版)には、公理的方法の教育的な意義について述べた後で「カテゴリカルな公理系と非カテゴリカルな公理系」の1節を設けている。

「ここに非カテゴリカルな公理系というのは、その公理系を満たすものの型が唯一とは限らないものことである。すなわち、そこでは公理系は幾通りにも解釈されるのである。」(文部省(1971)、改訂版、p.32)

「この非カテゴリカルな公理系こそ、今日の抽象数学で活躍し、現代数学を特徴づけているものであるが、これらの公理系が効果を発揮するのは幾通りにも解釈ができてのうえのことである。」(文部省(1971)、改訂版、p.33)

数学教育現代化運動の潮流に沿ったこの学習指導要領では、現代数学の方法を取り入れることが望ましい。その現代数学の方法を特徴づけるのは非カテゴリカルな公理的構成である。数学史の流れの中で非カテゴリカルな公理的方法が発見された契機は、幾何学においてであった。ゆえに、高等学校数学ⅡBでは幾何の公理的方法を学ぶことになったという経緯がここに説明されているのである。ところが、非カテゴリカルな公理的構成を生徒に理解・体得させることは可能かどうかについては、文部省(1971)以下のように述べている。

「やはり、素朴な直観に根ざしたカテゴリカルな公理系についてまず学び、漸次非カテゴリカルな概念に進めていくのが教育の本道であると考えられる。」(文部省(1971)、改訂版、p.34)

しかし、カテゴリカルな公理系にとどまれば、伝統的な初等幾何教育の枠から出ることはない。前節で言及したDieudonnéの主張のように、むしろ初等幾何を排除するのが現代化の主張である。非カテゴリカルな公理系に踏み込まないと現代化の主旨は生かされないのである。

カテゴリカルな公理系はEuclid原論に始まる。Euclid原論は紀元前300年頃に書かれた教科書であり、公理と公準から論理展開がなされた人類史上初の学問体系を構築したものである。内容は幾何学、整数論、実数論を精密に理論展開している。(C.B.Boyer(1968)(加賀美鐵雄他(訳))(1983)、pp.144-174) この『原論』の幾何学の部分に則して作成される教材が「Euclid幾何」、「初等幾何」と称される。前節でみたように、わが国では明治以降、現代化より前までは中等教育においてEuclid幾何が教えられてきたのである。Euclid幾何では公理(『原論』で

は公準)を最終的な根拠として定理の証明、作図、軌跡を求めることで論を進めるのである。ここで、公理の中に出てくる「点」、「直線」、「平面」の用語をどのように定義するのが第一の問題となる。また、公理をどのように設定するかが第二の問題となる。

明治40年文部省検定済教科書(中学校・師範学校用)である三輪一郎(1907)をみると、立体を基に面、線(ここでは線分)、点を定義し、以下の説明が加えられている。

「點は位置アリテ大キサナキモノナリ」、「線は位置アリテ長サノ一方に擴ガリヲ有スルモノナリ」、「面ハ位置アリテ長サ及ビ幅ノ二方に擴ガリヲ有スルモノナリ」この後に「公理1. 図形ハ其形及ビ大キサを變ズルコトナク任意ニ其位置ヲ動かスコトヲ得」があり、直線と平面の定義が続く。「直線トハ二つの線ニシテ其ノ中ノ任意ノ一部分ヲ取り其二點ガ他ノ任意ノ一部分ノ上ニ落ツレバ如何様ニ置クモ常ニ全ク相重ナリ合ウモノナリ」、「平面トハ二つの面ニシテ其ノ上ノ任意ノ二點ヲ過ル直線ガ全ク其平面上ニ在ルモノナリ」(三輪一郎(1907) pp.6-9) この定義では直線と曲線の定義が複雑で生徒には理解が困難と思われる。

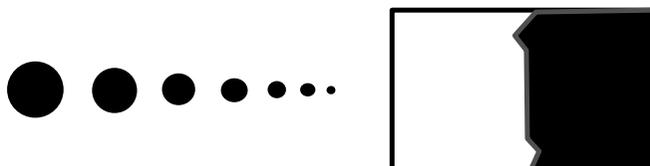


図1 点と直線の説明図(曾田他(1932) p.8を基にして作成)

この後教材の改良が必要であった。実際、昭和7年文部省検定済教科書の曾田梅太郎他(1932)では、まず「戸外の観察」の項があり、身の回りの図形を観察させている。次に図1左の黒い円の図形列を示し「問2 次ノ圓デ、ドレガ眞ノ點ニ近イカ。」という問いが設定されている。「點ニハ位置ガアルケレドモ、大サハナイ。」(原文のまま。曾田他(1932) p.8)という説明が記述されている。また、図1右の線の定義を示すための図は、地図上の日付変更線を示し、変更線の西側は白いままで東側を黒く塗ってある。黒と白の境界が線であるということを図で示している。そして「線ニハ長サト位置トガアルガ。幅モナケレバ、厚サモナイ。」(曾田他(1932) p.8)と記述されている。また、直線の説明には、2点を取って直線を引く図、糸に重りを付けて垂らした図、および、大工道具の墨壺の紐を弾く図が示されている。(曾田他(1932) p.9) このような直観的な定義は著作者の広島高等師範学校附属中学校数学研究会の議論が活かされ、生徒にとって受容可能な内容に改良されたものと思われる。すなわち、図形列の極限図形が点であることを直観的に理解させようとする示されている。しかし、黒い点の極限図形は半径が0の円であり、鉛筆で打った点とは異なる。鉛筆の線、墨壺の紐、重りの糸には幅が存在する。よって、このような矛盾は依然として残っていることになる。すなわち、点、直線、平面の定義は厳密に定義しようとするとう理解困難になり、逆に直観的に定義すると厳密さに欠ける面が出る。そこで、現代化期には、点、直線、平面等は無定義用語とし、公理によって間接的に定義する方向が一般的になった。実際、表3では、ほとんどの教材がこれを採用している。したがって、伝統的なEuclid幾何教育を排除するのではなく、Euclid幾何教育自体を現代化する方向性が打ち出されたことになる。以上が、高等学校への平面幾何の公理的構成の導入の理由と背景である。実際に導入した結果を時節以降で述べる。

### 3. 現代化当時の実践結果と公理的構成の問題点

平面幾何の公理的構成の実践結果は良好ではなかった。日本数学教育学会でのこの分野の実践報告は2件しかなく、方法提案も論文1件、発表要項1件のみである。

松岡清（1976）の授業後のアンケート結果（表1）では、「他の章より理解しにくかった」が47%、「興味なくはやくすめばよい」が55%であるから、否定的な反応が多くあり決して良好とは言えない。アンケートの第一の自由記述では、以下のような否定的な反応が多くあり、肯定的な記述は末尾の1件のみであった。「定理A→B→…→公理・無定義用語と、よりもとの根拠をさぐり求めていった考え方・態度ついて・私たちに無用の考え。（8人）、・わかり切ったことをくどくどと説明しなければならないので面倒である。（8人）、・中学時代の記憶を呼びおこしただけ。（4人）、・以前はぼんやりしていたことが、一步一步進んでいったのでよく理解できた。（4人）」これに対して、以下の第二の自由記述では、肯定反応が多かった。「平面幾何あるいは数学全般に関して以前とは考え方・見方のかわった点や授業から得たことは、・日頃何の疑問も持たずに使っていた言葉について、考えるようになった。（12人）、・定義・無定義用語・公理・定理というものがわかりかけた。（11人）、・順序だてて学問を組み立ててゆく考え方。（19人）、・数学の分野の広さを知った。（7人）」（松岡（1976）p.367）全体として生徒は授業の主旨は理解したものの、煩雑な証明を伴うこのような学習をする意欲はわいてこなかったと考えられる。

表1 授業後のアンケート結果  
（松岡（1976）を基に作成、88人、数値は%）

理解の程度について	よく理解できた	10
	他の章と同程度であった	43
	他の章より理解しにくかった	47
進度について	もっと速く	10
	丁度	43
	速すぎた	34
全般について	もっと勉強したい	9
	他の章とかかわらない	36
	興味なくはやくすめばよい	55

加藤良彦他（1976）も、授業後の否定的反応を報告している。「否定的感想……『当然のことを証明するのは苦痛だ』、『個々の証明ではゴマカサれているみたい』、『当然なことばかりで何のためにやるのか分からない』、『知らなくても支障はないし、専門的に数学をやる人がやればよい』」（加藤他（1976）p.366）一方、肯定的な反応もあった。「肯定的感想……『当然のことと想っていたことが、いくつかの公理や定理で構成されていることに興味をもった。』『中学時の幾何に基礎が与えられてスッキリした。』『理論的なものに触れた思いで、中学と高校の差を感じた』」（同（1976）p.366）加藤他（1976）の結論は「平面幾何の公理的構成」という教材は指導に多くの困難が伴うということであり、その要因の一つは「参考書によって公理の立て方や扱い方がまるで異なるため、生徒が不安に思っている」ということである。実際、生徒は教科書とともに、参考書と傍用問題集を用いて学習しているから、教科書の公理と参考書の公理が異なっているので、混乱を招き不安に思っていることが指摘されている。本稿次節で示すように、教科書自体も出版社により異なる公理を採用している。

指導に困難を伴うため「平面幾何の公理的構成」という教材が軽視されていたことの証左は、傍用問題集の下記の記載である。すなわち、「公理のとり方は、ただ1通りとは限らないし、また、教科書によっても異なるから本項の問題を取り扱うときには十分注意してほしい。都合によっては全部割愛してもよい。」（田中穰他（1976）p.112、中村幸四郎（1977）p.121）これが受験

問題集ではなく教科書の傍用問題集の記述であるから、この単元については多くの時間数を充てて指導したわけではなかったことを示唆するものである。実際にはほとんどの部分を割愛されていた可能性も示唆している。

さて、彌永昌吉 (1981) が指摘するように、Euclid原論には順序の公理がないことによる論理的欠陥がある。順序の公理とは、点が直線のどちら側にあるのかという配置の位置に関する公理である。位置を明確にしないまま、誤った図を描いて推論をしてゆくと、誤った結論に到達してしまう。(彌永 (1981) p.12) そこで、Euclid原論の欠陥を保管して完全な公理系を示したのが、D.Hilbert (1930) である。Hilbertの公理系は、5群20個の公理からなる。結合の公理 (8)、順序の公理 (4)、合同の公理 (5)、平行の公理 (1)、連続の公理 (2) である。このとき、Hilbertは無定義用語を初めて用いた。すなわち、「点」、「直線」、「平面」、「通る」、「上にある」、「間にある」などの用語の意味は、公理群がそれを示しているという考え方である。すなわち、「点」と呼ばれる、 $A, B, C, D, E, \dots$ 、「直線」と呼ばれる、 $a, b, c, d, e, \dots$ 、「平面」と呼ばれる、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ があり、その関係性は、以下の公理が規定するというのである。これらは、Euclid幾何という点、直線、平面でなくともかまわないのである。

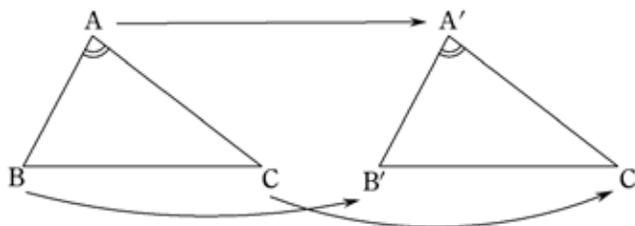


図2 角形の二辺夾角の合同定理を証明 (表2の教材11 (平野) を基に作成)

この方法が数学の推論に都合が良いことがわかり、抽象的な現代数学の方向性を示したのである。たとえば、ある関数列が実数の中のある点集合を除いた定義域のみで収束することがわかったとする。この点集合を表現するのに「当該関数列が収束しない集合」としてしまえば、その集合の実態にかかわらず、次の推論に進めるのである。したがって無定義用語の考え方は、数学教育現代化にとって欠かせないものなのである。次節で見ると、当時の教科書、参考書の著者たちは、すべて無定義用語の考え方を採用している。これが、生徒にとって受容困難な概念であった可能性もある。そして、順序の公理を設定して議論するのは、場合分けを伴い煩雑になる。さらには、合同公理について「移動する」、「重ね合わせる」、「図形が運動する」などの表現は、直観的でわかりやすいにもかかわらず、その意味が不明で公理を設定しても相変わらず直観で図を観察しているに過ぎないように感じるはずである。つまり、公理系による厳密化の利点を感じられないわけである。「長さを変えずに線分を移動できる」という公理を設定することの意味は、「同一の長さの線分の存在を、公理が保証している」という意味である。公理とは存在保証であり、それが、結果として動的に見えることを順序を追って説明する必要がある。

次節で見ると、いくつかの教材はこのように、動的・時間的ではなく、静的な公理を設定して、誤解のないように配慮している。ここでは、図3でみるように、線分ABと長さが一致する線分OC、または、OC'を、任意の半直線上に「存在させることができる」という公理

を設定している。角の移動も、 $\angle QRP$ と大きさが同じ角が、どちらかの半平面上に「存在させることができる」という公理を設定している。加藤他（1976）が生徒の反応としてあげている「個々の証明ではゴマカサしているみたい。」というのはこの合同の公理の使用の際であったと考えられる。例えば、三角形の二辺夾角の合同定理を証明する場合、図2で、 $A$ を $A'$ に移動する。 $AB=A'B'$ より $B$ が $B'$ に移動される。 $\angle A=\angle A'$ より、辺 $AC$ が辺 $A'C'$ に移動される。 $AC=A'C'$ より $C$ は $C'$ に移動される。よって、辺 $BC$ は辺 $B'C'$ に移動される。ゆえに、 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ が証明された。このような移動による証明は、小学校で「三角形を切り取って移動して重ねてみたらぴったり重なった。」ことと、中学校で「図を観察して直観的に重なることがわかるから合同になる。」ことから少しも進歩がなく、加藤他（1976）の報告にある「ゴマカサしている」という生徒の反応につながっている。次節の表3の「存」の項目が1（有り）になっている教材は、線分の長さを変えない移動と、角の大きさをかえない移動の意味内容が、「存在を保証する」という静的な公理であることを示している。すなわち図3において、半直線の指定された側に線分 $AB$ と同じ長さの線分が存在すること、半平面の指定された側に、 $\angle PRQ$ と同じ大きさの角が存在すること、さらに1個の角の相等公理を加えて「移動する」ことの意味内容となる。これを記述しているのが「存」の教材である。

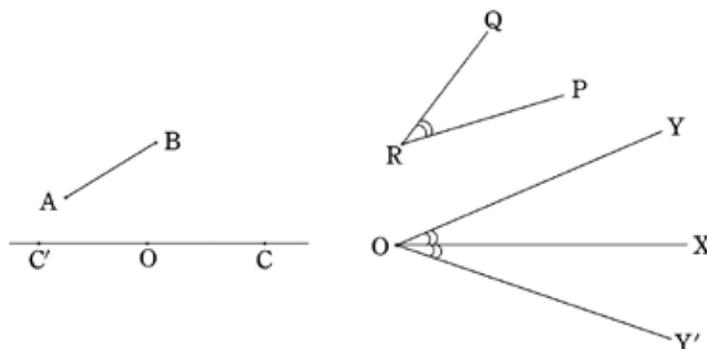


図3 静的な合同公理の説明図（表2の教材9（矢野）を基に作成）

また、結合の公理についても一部の教材では、球面上の大円を直線とみなして「異なる2点 $A$ 、 $B$ を通る直線はただ1本に限る」ことを説明している。比較の対象がなければ、この公理の妥当性が認められないからという配慮からの記述であろう。本稿では次節で、当時使用された教科書と参考書の公理の記述を分析し、松岡（1976）、加藤他（1976）で指摘された問題点を明らかにする。

#### 4. 現代化期に使用された教科書等の幾何公理系設定の分析

前節までに述べたように、当時使用された教科書、参考書は、無定義用語の意義の説明、公理の設定方法、合同の公理の表現、平面以外の対象への言及、歴史上の経緯の説明等が著者によって多様に異なっている。その不統一が、平面幾何の公理的構成という現代化教材の受容を困難にした可能性がある。本節では、当時使用された教科書6種類、参考書8種類の記述を分析し、記述のどの側面がどのように多様性をもたらしていたのかを分析する。参考書を含めた

のは、大多数の生徒が教科書、参考書、傍用問題集を用いているからである。傍用問題集は教科書に準拠するため、公理設定は教科書と同一である。しかし、参考書は、教科書と同一出版社の場合でも著者によって公理設定が異なるのである。したがって、分析対象から傍用問題集を除外し教科書と参考書に限定することにした。

表2 分析対象の教科書と参考書

番	筆頭著者	出版社	書名	種類	発行年	公理	合同公理用語
1	小平邦彦	東京書籍	数学ⅡB	教	1975	7	運動
2	伊関兼四郎	数研出版	新編数学ⅡB	教	1979	4	移す
3	功力金二郎	数研出版	高等学校数学ⅡB	教	1979	12	合同変換
4	小松勇作	旺文社	高等学校新編数学ⅡB新訂版	教	1978	6	重ね合わせる
5	小林善一	教育出版	新訂数学ⅡB	教	1977	11	移動
6	植竹恒男	清水書院	数学ⅡB	教	1979	9	運動
7	小川庄太郎	文英堂	理解しやすい数学ⅡB	参	1977	6	存在
8	茂木勇	旺文社	数学ⅡBの基礎	参	1974	7	存在・重ねる
9	矢野健太郎	科学振興社	解法の手引き数学ⅡB	参	1974	6	存在
10	石谷茂	文研出版	基礎からの究明数学ⅡB	参	1978	7	運動
11	平野次郎	文研出版	究明数学ⅡB	参	1980	15	移動・裏返し
12	橋本純次	数研出版	チャート式数学ⅡB	参	1980	9	存在、合同
13	中村幸四郎	数研出版	チャート式基礎からの数学ⅡB	参	1974	7	移動・裏返し
14	田島一郎	旺文社	よくわかる数学ⅡB	参	1974	4	移動・裏返し

設定項目のうち公理の数は、 $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、……、 $II_1$ 、 $II_2$ 、 $II_3$ 、……のようにグループ化されているものは、グループ内のそれぞれを個数に算入した。たとえば、教材11(平野)ではHilbertの方法に沿って5グループ分けた公理の14個を示し、独自の運動公理を1個追加している。教材11では実質的に解説、例題、練習問題の中で生かされているものは7個である。しかし、示された公理は著者の意図する教材とみなしすべてを算入してある。傾向の概略を把握するため、本稿では数量化Ⅲ類を使用した。表2に分析対象の教科、参考書を示す。表2の「公理」は記述されている幾何公理の個数であり、ばらつきが大きいことが読み取れる。実際、公理の個数の平均は7.9個であり、標準偏差は3.1である。教材1～6の教科書に限定すると、平均は8.0であり標準偏差は3.0である。教材7～14の参考書に限定すると、平均は7.6であり標準偏差は3.3である。本来は記述に制約がある教科書も、公理の個数においては自由な記述が可能な参考書と同様にばらつきが大きいことがわかる。合同の公理の表現もばらつきがあり、「運動する」、「移動する」、「重ね合わせる」、「合同変換する」など、教材によって異なる。合同の公理を移動のような動的な表現を用いている教材のなかには、線分と角の存在保証としての静的な説明を事前に行った上で、移動などを意味づけている教材もある。この場合、移動と存在の両方が該当する。

表3の順序の公理も教材1(小平)では「平面上の1直線は、この平面を2つの側に分け、同じ側の2点を結ぶ線分上の点はすべて同じ側にあり、異なる側の2点を結ぶ線分は元の直線

表3 調査した項目（該当するものが1）

番	著	無	結	順	合	平	連	個	存	量	移	非	歴	教	頁
1	小平	1	1	1	1	1					1		1	1	1
2	伊関	1	1	1	1	1			1	1	1			1	
3	功力	1	1	1	1	1		1	1	1	1			1	
4	小松	1	1	1	1	1						1		1	1
5	小林	1	1	1	1	1	1	1	1		1			1	1
6	植竹	1	1	1	1	1		1			1		1	1	1
7	小川	1	1	1	1	1					1				
8	茂木	1	1	1	1	1			1		1	1			1
9	矢野	1	1	1	1	1	1		1	1			1		
10	石谷	1	1	1	1	1				1	1				1
11	平野	1	1	1	1	1	1	1			1		1		
12	橋本	1	1	1	1	1		1	1			1			
13	中村	1	1	1	1	1				1	1		1		1
14	田島	1	1		1	1					1				

表4 項目の概略

著	筆頭著者の姓
無	無定義用語の採用
結	結合の公理を設定
順	順序の公理を設定
合	合同の公理を設定
平	平行の公理を設定
連	連続の公理に言及
個	公理の個数が7個超
存	移動ではなく存在
量	数量公理を設定
移	移動、運動など
非	非平面上の直線に言及
歴	幾何公理の歴史に言及
教	教科書である
頁	章が書籍全体の1割超

と交わる」(p.218)を採っている。一方、教材2（伊関）では「直線上にない3点A、B、Cをとったとき、 $l$ は3つの線分AB、AC、BCのいずれとも交わらないか、または、そのうち2つと交わって他の1つと交わらない」(p.193)を採っている。その他の教材も、これ以外の表現を採っているものもあり、ばらつきがある。

本来は幾何公理のほかに、量の加法性の公理（数量公理、一般公理）が必要である。数量公理とは、下記のような量に関する基本法則である。ただしこれを公理と明記していない場合は、該当しない方に分類した。

- (i)  $a = a$  (ii)  $a = b \rightarrow b = a$  (iii)  $a = b, b = c \rightarrow a = c$   
 (iv)  $a = a', b = b' \rightarrow a + a' = b + b', a - a' = b - b'$

表3に示してあるその他の項目は表4に概略の説明を示した。各教材によって幾何公理の個数が異なる。このため公理の個数が7個を超えるか否かで「個」という項目を設定した。また、幾何教材は図を多用する必要がある。言葉での説明や証明も多くなる。教材の書物全体で幾何の公理的構成に1割以上のページ数を割いているか否かの項目「頁」を設けた。ただし、索引と解答部分は分母となる全体から省いている。

教材の類似性の概略を知るため、数量化Ⅲ類による分析を行って図4を得た。ただし、表3の「連」、「個」、「存」、「量」、「移」、「非」、「歴」、「教」、「頁」のみを分析項目とした。「無」、「結」、「順」、「合」、「平」の項目は14（田島）を除いて全項目が該当するため分析から除外した。距離の近い教材は、遠い教材より類似性が強いと考えられる。なお、小川・田島、小平・植竹、伊関・功力は一致しているため1つの点で示されている。軸のネーミングを行うと、横軸右方向が「教育的」、横軸左方向が「専門的」である。また、縦軸上方向が「簡明」、縦軸下方向が「詳細」と考えられる。

グルーピングをしてみると、グループA：{小川、田島、小平、植竹、石谷、中村}、グルー

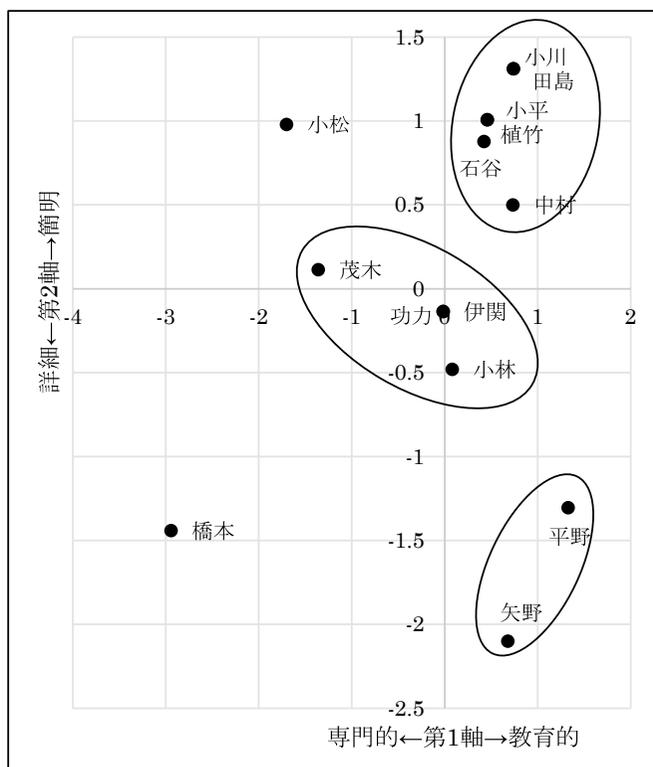


図4 数量化Ⅲ類・教材分類 (寄与率：第1軸32.5%、第2軸20.8%)

グループB：{茂木、功力、伊関、小林}、グループC：{平野、矢野}となり、小松と橋本はどのグループからも比較的遠いため孤立しているとみなした。グループC以外は教科書と参考書が混在している。グループAは簡明な記述で専門的な事項には触れず、教育的な配慮がある教材に分類された。グループBは原点近くに位置し、中間的な性格として位置づけられた。グループCの平野と矢野はいずれも詳細な記述をする参考書であり、同一な傾向があると考えられる。Aグループの小川と田島は、ともに平易さを目指した参考書であるため、記述傾向が一致したと考えられる。また、Aグループの伊関と功力は同一出版社の教科書であり、記述傾向が一致したと考えられる。Aグループの小平と植竹では、集合の記号の使用の有無で表現方法が異なる。しかし、この設定項目からは同一傾向の記述とみなされる結果になった。

個々の教材を目視のみで比較する場合には、どれかの要素に注目してしまうため、全体の概略が把握できにくい。データをまとめて可視化することによって、例えば小平・植竹と中村のように、予想よりも近い教材を発見することもできた。小松、橋本以外の教科書はそれぞれが近い位置にあるものの、生徒の使用した参考書を含めると、距離が遠い教材が存在したことがわかった。グループAの教科書のどれかを使用している生徒が、グループBやC、小松、橋本の参考書で学習した場合、公理設定の方向性が大きく異なることもあり得る。したがって、加藤他(1976)の指摘した生徒の不安の存在した事実を裏付けした結果となった。

一方、どの項目が教科書・参考書に多様性をもたらしたかについての概略を数量化Ⅲ類で分析したのが図5である。分散が0に近い項目、すなわち全ての著者にほぼ共通である「無、結、

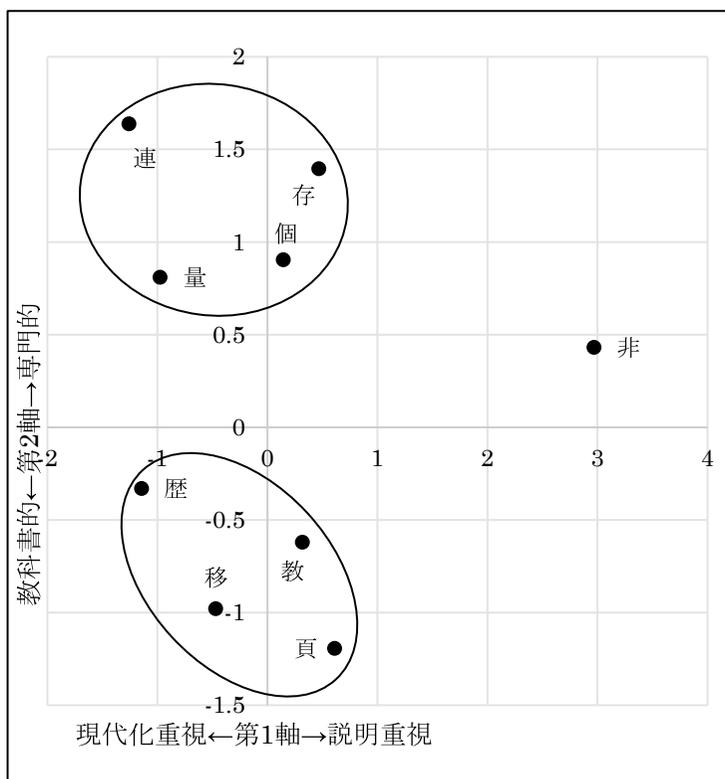


図5 数量化Ⅲ類・項目分類 (寄与率：第1軸38.1%、第2軸28.0%)

順、合、平」は分析対象から除外している。軸のネーミングを行うと、横軸右方向が「説明重視」である。なぜならページ数を費やし、非平面を提示して説明するなどの記述がみられる。横軸左方向が「現代化重視」である。なぜなら、歴史としてEuclidの公理とHilbertの公理を並置して、公理主義の現代数学の意義を説明しているからである。また、縦軸上方向には連続公理への言及や存在による公理の言及など公理の個数が多く「専門的」とみなすことができる。縦軸下方向は、移動公理の設定、歴史に言及する文章ページの多さから「教科書的」と考えられる。

ここでは2つのグループが認められる。グループA：{連、量、存、個}、グループB：{歴、移、教、頁}である。そして1つの孤立点が認められる。平面以外の球面や円柱の側面等に言及して、非ユークリッド幾何に言及した教材、連続公理に言及したものは特殊な教材であるため、他の教材との距離が遠いと考えられる。また、合同の公理を移動や重ね合わせのような直感的表現で示しているのは、教科書の記述に多くある。「教」と「移」は距離が近く、教科書のほとんどが合同公理を移動で表現していることがわかる。グループBに「頁」が含まれるのは、教科書もこの單元には歴史を含めて相応の頁数を割いていることを示している。連続の公理については、そのようなものがあるという記述にとどまっているものの、歴史の説明から一部の教材で言及されている。図5においても、グループA、B、および「非」はそれぞれの記述に特徴があり、分析した教材は記述にばらつきが大きいといえる。図5からも、加藤他(1976)の指摘した生徒の不安をもたらした事実が存在したことが裏付けられた。

## 終わりに

数学教育現代化の反省期以降は、平面幾何の公理的構成は教材として扱われるとはなくなった。現代化期においても、この教材の受容は困難であった。本稿では受容困難な要因のうち、公理設定の不統一、教科書・参考書による記述の異同の大きさがあったことを明らかにした。また、公理の個数、合同公理の表現にもばらつきが大きかったこともわかった。さらには、非カテゴリーカルな公理という概念への理解のための記述が統一されていなかったことも要因として示唆された。現代化期には、現代数学の考え方の導入を指向していたため、抽象化を急いだ傾向があった。カテゴリーカルな公理系の学習が不十分な状態においては、非カテゴリーカルな公理の理解は困難であったと考えられる。

しかし、現代化当時には田中不二夫(1975)と松田道雄(1968)は、静的な合同公理を無理なく導入する方法を提案していた。しかし、これらを教科書の記述に取り入れる機会はなかったのである。そして、明治期以降の初等幾何教育の歴史においては、カテゴリーカルな公理系の下で学習がなされた。たとえば、昭和30年度文部省検定済教科書である泉信一ら(1961)では、順序の公理を含まない公理系を設定して「二等辺三角形の二つの底角は等しい。」「一つの辺とその両端の角が等しいとき、二つの三角形は合同である」等の定理を無理なく証明している。

(泉他(1961) pp.16-23)ただし、泉等(1961)は合同の公理は移動を用いている。移動が図3の静的な存在保証であることを補完することにより、より適切なものになるであろう。実際、小平邦彦(1985)は「数学の厳密性に対する考えは時代と共に変化し、数学を学ぶ個人にとっては学力の発達に伴って進展する。私も旧制中学で数学を学んだが、当時の私にとって『点トハ位置ノミアリテ大キサナキモノナリ』にはじまるユークリッド平面幾何は厳密極まる学問体系に見えた。私は、数学の初等教育としては、その体系がそれを学ぶ生徒にとって厳密ならばそれで十分であると思う。」(小平(1961)、p.v「はしがき」)これは、不完全であっても発達段階に適切な公理系を設定すべきであるであることが、体験を基にして主張されている。この意味するところは、小学校算数科では、身の回りを観察して具体物操作による理由の説明、中学校数学科では紙に書かれた図形を観察して、直観的に正しいことを認識し証明を行う。そして、高等学校においては小学校以来当然であるとみなしていた命題が、公理を使って証明する必要があることを認識する。このような発達段階を考慮すれば、高等学校段階にふさわしい程度の厳密性を持った公理系を設定することができるはずである。わが国では明治期以降の初等幾何教育の歴史があり、どのような公理系が設定されてきたかを、算数・数学教育史の観点からさらに研究する必要がある。本稿では数学教育現代化期の教材「平面幾何の公理的構成」の分析を通して、公理を含む初等幾何教育へのいくつかの示唆を得ることができた。

## 引用・参考文献

- 文部科学省(2018)「高等学校学習指導要領」(平成30年3月、第4節数学)  
<https://www.nier.go.jp/guideline/h29h/chap2-4.htm> (2020/09/16検索)
- 文部省(1970)「高等学校学習指導要領」(昭和45年10月、第3節数学)  
<https://www.nier.go.jp/guideline/s45h/chap2-3.htm> (2020/09/15検索)
- 佐藤良一郎(1979)「中等学校数学教科書の変遷」、『科学教育研究』Vol.3、No.2、日本科学教育学会

- 佐々木元太郎 (1966) 「OECC各国の数学教育」、日本数学教育学会 (編) 『数学教育の現代化』、培風館
- 佐々木元太郎 (1979a) 「外国における算数・数学教育の歴史と現状」、赤堀也 (編) 『算数・数学教育の理論と構造』 (学研版・教育学講座No.11) pp.167-187、学習研究社
- 佐々木元太郎 (1979b) 「第0章ユークリッド総合幾何学の現代化における位置」、同著 『ユークリッド幾何』 (現代数学レクチャーズA-5)、培風館
- 文部省 (1971) 『高等学校・新しい数学教育—数学教育現代化講座指導資料—』、東洋館
- Boyer, Carl B. (1968) (加賀美鐵雄・浦野由有 (訳)) (1983) 「7.アレクサンドリアのユークリッド」、同著 『ホイヤー・数学の歴史1—エジプトからギリシャ前期まで』、朝倉書店
- 三輪一郎 (1907) 『訂正・幾何学教科書・平面』 pp.4-9、金港堂書籍
- 曾田梅太郎・広島高等師範学校附属中学校数学研究会 (1932) 『新制平面幾何』、修文館
- 松岡清 (1976) 「公理的構成の指導について」、『日本数学教育学会誌』 (臨時増刊総会特集号)、Vol.58、p.367
- 加藤良彦・小川正俊 (1976) 「公理系の指導と問題点」、『日本数学教育学会誌』 (臨時増刊総会特集号)、Vol.58、p.366
- 田中稔・米田信夫 (1976) 『改訂版オリジナル数学演習ⅡB』、数研出版
- 中村幸四郎 (1976) 『三訂新版スタンダード数学演習ⅡB』、数研出版
- 彌永昌吉 (1981) 「ユークリッド『原論』の功罪」、『数学セミナー』 Vol.20、No.2、日本評論社
- Hilbert, David (1930) (中村幸四郎 (訳)) (2005) 『幾何学基礎論』、ちくま学芸文庫 (ヒ-8-1)
- 田中不二夫 (1975) 「公理的構成についての理解を深めるための指導」、『日本数学教育学会誌』、Vol.57、No.5、pp.93-102
- 松田道雄 (1968) 「高校における“理論体系の典型”としての平面幾何」、日本数学教育会 (編) 『図形とその指導—高校編—』 (現代化のための指導シリーズ第12集)、明治図書、pp.94-111
- 秋月康夫・柴田敏男 (1980) 「第I章平面幾何の公理的構成」、同著 『幾何—高校数学への提唱』、紀伊國屋書店、pp.5-46
- 小平邦彦 (1985) 『幾何のおもしろさ』 (数学入門シリーズ7)、岩波書店
- 泉信一・近藤基吉・穂刈四三二 (1961) 『高等学校数学I [幾何] 改訂版』、日本書院

