名古屋女子大学　紀要　60（人・社）107～114　2014

表象として学ぶ０

宇野　民幸

Expression of Zero in Students’ Learning

Tamiyuki UNO

本稿においては、表象として表現されていく「０」という数について、初等教育における演算における「０」として、特に「０を掛ける」という場合についての考察をする。そして特に、教職を目指す学生における、これらの表現理解のあり方について検討をする。この際の、「掛け算の順序」の問題は、昨今でもいわば一般世間と初等教育の観点から、議論が続けられている状況である[1)]。そして、「０を掛ける」場合について、「０に掛ける」場合との違いを考察することも通して、０の概念を拡張することについて述べる。

１．「０」を取り巻く環境について

数の「０」を表現する場合においても、まさに、「０」という数字は、自然数が表現されて使われてきた経緯のなかで、発案されるのも、また、数の仲間として一般に使用されるまでには長い年月を要したよう、教育上も「１・２・３…」という自然数を学んだ後で登場する。これは、現代の算用数字の表記にもちいられる位取りの原理と関係しており、ある位に数量がない場合にもちいられることは、「０」の大きな役割の一つであり、「空位の０」と表現されている。しかし、日本の教科書においては、「１・２・３…９・１０」まで学び、その後で、「０」の意味を知ることができる、という順番であることがほとんどで、位取りをした「１０」の表記の、一の位が空位となっていることについて、原理的には説明がしにくい。諸外国においては、例えばスペインや中国では、「１０」という数字が登場する前に、「０」という数と、その意味が出てきている。これらの国においても、しかし「１・２・３…」を学ぶ前に、「０」という数が登場するわけではないことが分かる。これは「０」という意味を把握すること自体が、具体物としての対象がないということより、具体的な数（自然数）に先立って理解することが難しいことからといえる。いわば、個体発生が系統発生を繰り返しているかの如くである。

そもそも、今は「１・２・３…」という算用数字をもちいて表している「数」という概念自体が、抽象的なことがらであるといえる。就学前の段階においは、３個のものがあることを「３３３」と表現するなど、数字の「３」はシンボル的に見習ったとしても、３個のものの「数」を、その「３」という一つの表記で示しているということは、はじめは把握されえない状態がある[2)]。ゆえに、「３」という数は、３個のボールと３個の袋や、３本の傘と３人の子ども、など、１対１対応を通して、共通の状態であるということが、「数がおなじ」という概念、そして、ここでは、その状態について「３」というシンボルで表しているということになる。その過程では確かに、表現する上で、『○○○』という表象の段階もあろう。この上で、何もないこと自

体が共通の状態であることの、シンボルを「０」と表すと考えることができる。それは例えば、「ボールがかごに０個ある」や、「部屋には人が０人いる」という場合には、「かご」と「部屋」に共通性があるのではなく、「ボールがない状態」、「人がいない状態」に共通性を見てとれて、対応することができて、（実際には１対１対応ができないにせよ、）その共通の状態を「０」と表現することを理解する、ということになる。

また、「３０５」と「７１０」では、それぞれ、十の位と一の位に相当する数量がないということに共通性があり、それが空位の０で表されている。しかし、位が違うので、「０の重みが違う」と表現できなくもないが、どちらも「０」であるのならば、重みの違いを示すことはできないとも考えられてしまう。しかし、「３２５」と「７１２」であれば、前者の「２」は２０を表し、後者の「２」は単なる２を表しており、「２の重みが違う」といえば、位の違いの意味が表現される。同様に、空位の０は、置かれる位により意味が異なり、まさにその位置により、どの位が存在していないのか、を意味していることから、存在の意味合いは異なる。すなわち、数の本質として、「一対一対応ができる」という関係性の共通性があるが、そのような数の性質を（直観的にも）捉えた上で、０の場合は、何もなく対応がとれなくても、互いに過不足（数の多少）はなく、むしろその共通性があることから、それが数「０」として表記されているといえる。

このように考えると、空位においても、無の表現の「０」においても、自然のなかで理解していくだけでなく、位取りをした「１０」という数にせよ、「１３→１２→１１→１０」といった、結束している数量（１０の束）と、束になる数未満のばらの量（端下の数）が、共に存在している状態の表現から、そのばらを減らしていき、あらためて１０の束のみになる時の数の表現として、「１０」の表記を捉えなおすことがより良いといえる。

２．０の掛け算の意味

足し算や引き算の意味には、合併と増加の表現や、残りを求める求残、対象の補集合の要素の数を求める求補、そして２つの集合の要素の数の差を求める求差と呼ばれる表現がある。これらの演算に０が含まれた場合に、その意味を考えると、それらの意味の違いがむしろ際立って表現されることが分かる。では、掛け算においてはどうであろうか。

ある数に０をかけること、すなわち、ｎをなんでもよい数として、「ｎ×０」を考える場合、その答えは０となることを、学んで知っている人は少なくないが、その理由を述べるとなると、当たり前、もしくは難儀なことになる場合が多い。ちなみに、「ｎ÷０」の計算はおこなうことができず、「考えられない」計算となっている。

特に０を掛ける場合「ｎ×０」について、その意味を考えると、足し算の「ｎ＋０」や引き算の「ｎ－０」のように、「何も足さない」、あるいは「何も引かない」という「何も変化がない」というイメージと同じように考えると、「何も掛けない」ということになり、答えは「ｎ」という感じになってしまう。このように何も変化を与えない存在は、掛け算においては「１」であり、掛け算を演算として考える際には、この１が「単位元」となる。ここでは、「０」は「零元」と呼ばれ、また新たな存在となる。この、演算するとすべて「０」になるという「ｎ×０＝０」ということも、結局「以前、習ったから」ということが理由として挙げられることが多くある。しかし、「ｎ÷０」がご法度である為、「ｎ×０」も、確かに「０」であったのか、自信がなくなっている場合もよく見られる。

この掛け算の意味については、特に初等教育において、「（被乗数）×（乗数）」すなわち、

「(かけられる数) × (かける数)」と表現される。そして、被乗数となる「１あたりの数」には、例えば、一房あたり２個の実をつけている「さくらんぼの房」など、１あたりの数をその属性として持っている自然物がある。そして、「さくらんぼは、一房で実は２個、二房で実は４個、三房で実は６個、…」と表現することができて、ここでは「２×ｎ」の意味を、まず数量として分かり易く把握することができる。また、さくらんぼの房から実だけを取り、２個ずつをお皿に入れても、同じようにして掛け算として、数量を考えることができる。前者は、１あたり、すなわち一房あたり２個という、さくらんぼの持つ自然な属性から、１あたりの数（大きさ）を直観的に捉えることができる利点があり、後者には、同じさくらんぼの実を用いて、例えば１皿あたり３個ずつ実を入れるとすれば、３の段の掛け算を考えることができるように、他の段（ｎの数）の掛け算にも対応することができる。ただし、掛け算を考える場合には、「必ず同じ数ずつ皿に入れる」、ことをその前提としている。前者のさくらんぼの自然な状態（自然物としての特性）は、実が２つずつという属性がさくらんぼ自体にあり、身近に知られてもいることから、「１あたり量」という概念が捉えやすいという利点があり、逆に自然の属性であるため、「３の段」や他の段には適用できない。また後者は、１皿あたりの個数に自由度があることから、他の段にも適用でき、応用ができるという利点があり、逆にそのために、なぜに２個ずつ入れるのか、または何故に同じ数ずつ入れるのか、など「１あたりの数」に対する特性としての自然な根拠は弱まり、人為的な客観性を頼りにすることになる。しかし、日常において、さくらんぼの個数を考える場合があるとしたら、むしろこの後者の掛け算として（１パック何個を何パック分など）の場合が多いとも考えられる。

掛け算における乗数（かける数）を考えた場合には、上記の前者の「何房分」と、後者の「何皿分(何パック分)」の違いについて、標語的に言うならば、さくらんぼの農家と買い物客の違い、すなわち生産者と消費者の視点の違いといえるかも知れない。しかし、現実には、さくらんぼの生産者が房のつたを用いて個数を管理している訳ではないであろうし、また確かに、日常においては、実際に掛け算を使う場面としては、１箱（１パック）あたり何個（何ｇ）の品物を、何箱（何パック）買うと、全部で何個（何ｇ）になるか、と計算するケースの方が一般には多いとはいえる。このように、掛け算の計算を活用する場面においては、後者の人為的な例は適しているといえるわけだが、掛け算の導入をする低学年の児童は、一房あたりの個数など、自然物それぞれの持つ個数的、または生物的な属性に関心を持てる時期ともいえる。また、他の「１あたりの数量」にある特性を自然物から見つけたい、知りたい、調べたいという時期でもある。そして、先ほどのさくらんぼの特性でいえば、続けて「四房、五房…」として、全部のさくらんぼの実がいくつになるかを考える手順を進めることは、初めからブロックを二個ずつ数えていくこととは、やはり自然な興味付けにも違いがあるといえる。

同様の興味から、例えば、人工物的ではあるが、「三りん車の車りんの数」について、一台、二台、三台…と考えて、「３の段」の数量を確認していく手順は、１あたりの数に対する身近な関心と、計算の意味への興味を保つ効果もあるといえる。このような場面を経て、ブロックで２個ずつや、また、３個ずつの合計を確認する作業を通して、より確かな掛け算の意味と計算を身につけていけるといえる。

そして、「０をかける」場面として、「２×０」を考えるとき、例えば何かを「２個ずつ入れた皿がない」状態だから、「０」個ともいえるが、自然物のさくらんぼを考えた場合には、まず、木にさくらんぼの実がなっていたら、「必ず実の個数は２の段」であること、すなわち「２×ｎ」となることが直観として捉えられ、確認して共有できる。これは人為的でも、ルールでもなく、

（何らかの自然界の理由はあるにせよ、）属性としての「１あたりの数」だからである。そして、さくらんぼの実がなる木は、自然にも存在している。ゆえに、さくらんぼの木に、さくらんぼが一房もなっていない状態において、実の個数は全部で「２×０」と表現される。

３．量の掛け算、特に０を掛けることについての補足

上述の第２節のように表現すると、「ｎ×０」においても、その状況と意味合いについては、一般のかけ算「ｎ×ｍ」の意味を十分に把握した上で、次第に理解されてしかるべきものだと考えられる。ゆえに、「ｎ×３⇒ｎ×２⇒ｎ×１⇒ｎ×０」という順次的な表現は、その過程に意味を持っており、また、「１・２・３…」とものの数を数える段階において、ボールや人を数えていた場合にも、入れ物となるかごや部屋を考えて、その「ない」・「いない」という状態・状況（の共通性）が表現できる。この、「ｎ×０」の導入前の段階、すなわち「ｎ×３⇒ｎ×２⇒ｎ×１」という段階において、それらの状況を設定できる環境、いわば、そのｎ個１まとまりの１あたり量ならではの環境設定（その１あたり量が存在している状況など）を示しておく。そして、対象（１あたり量）がなくなった場合において、その環境や設定のみが存在するときに、あるはずの１あたり量がない、あってもいい１あたり量がない、すなわち、「１あたり量×０」という意味で「ｎ×０」という表現がなされる。それが例えば、ｎが２の場合については、先ほどのさくらんぼの房の実であれば、その環境は「さくらんぼの木」、うさぎの耳であれば、その環境は「うさぎ小屋」や、うさぎが普段いる「原っぱ」が考えられる。また他にも、ｎが６の場合については、１あたり量がカブトムシ１匹あたりの足の数であれば、環境はカブトムシを入れる「虫かご」や、カブトムシが普段いる「クヌギの木」、などの設定が考えられる。

この上述の設定をより厳密に考えていくと、小屋は特にうさぎ小屋、虫かごはカブトムシ用の虫かご、ということになる。また場合によっては、それぞれ、動物小屋、昆虫用の虫かごとしてしまって、「小屋には動物がいません」、「虫かごには昆虫はいません」として、動物の耳の数、昆虫の足の数を表現するということでも良さそうであるが、すると、小屋に動物以外の生き物（例えば、蝉やこおろぎ）や、虫かごに昆虫以外の虫（例えば、蜘蛛やムカデ）が、いたとするとややこしくなる。ゆえに、「今日は原っぱに、うさぎが一匹もいません。うさぎの耳はいくつありますか。」あるいは、「うさぎ小屋には、今うさぎが一匹もいません。うさぎの耳はいくつありますか。」という表現となり、また、「クヌギの木には、今日はカブトムシがいません。カブトムシの足は何本ですか。」あるいは、「虫かごにカブトムシはいません。カブトムシの足は何本ですか。」となる。これらの答えを表現する際には、「いないのなら、０に決まっている。」と、答えが自明であるために、立式をする意味がないと感じられてしまうので、「今日は原っぱに、うさぎが一匹もいません。この時、うさぎの耳はいくつあるか、どのように式に表せますか。」とすれば、自明である答えの「０」と、立式をつなげていくことが考えられる。また、答えがやはり自明でありすぎるため、「虫かごにカブトムシはいません。カブトムシの足は何本ありますか。」と問われると、虫かごにカブトムシの足が、残骸なのか、何本か残っているという状況設定を想起してしまう場合もあり得る。ゆえに、「普段はカブトムシがいるクヌギの木に、今日はカブトムシがいません。この場合、カブトムシの足は何本かを、どのように式で表せますか。」とした方が、自然な環境設定を感じることができる。そして、このような自然物による環境設定の場合、むしろ子どもからは出にくいとも考えられるが、その疑問点として、「何故に、いもしないカブトムシの足の数について、式で表すのか。」という疑問に

対しては、「もしカブトムシがいたら、どのような式となるか。」についての理解を確実にするため、といえる。これはかごや部屋が、この場合、ボールを入れるためや、人が居るための環境設定であることと同じ意味であり、また、その意味の拡張であるといえる。

同様に、「ｎ×ｍ」を考える際に、例えば「６×４」として、オレンジ６個入りのパックを４パック買った際に、全部のオレンジの数を計算することが考えられるが、では、カブトムシが４匹いた際に、全部の足の数を計算すること（必要）があるのか、という日常からの質問も考えられる。まさにそのことにより、教科書には自然物より人工物が多用されているとも考えられる。確かに、オレンジなどの品物を買う場合の、合計の個数を計算する今の生活においては、カブトムシの足の合計を出す意味こそ見いだせなくなっている。しかし、カブトムシの足の合計を出すことは、掛け算という表現からなり、立式と答えを求めることの意義が理解されて、技術ともなれば、１あたり量と掛け算を身につけているため、６個パックのオレンジのかけ算にも、対応でき、応用できる考え方であるといえる。むしろ、それを問うのであれば、６個パックのオレンジや、９個パックのクッキーなど、「その食材を変える意味は、何か」といえば、そのパックが現によくあるということか、また逆に、どんなパックでもできる（パックされている）ということであろう。そうであれば、９個パックのオレンジや、６個パックのクッキーなど、むしろ様々な場合があり、日常で例を見つけようとすれば、どちらにしろ、種別によらずその場で対応して、掛け算をすることになる。

４．学生の「ｎ×０」の表現理解

第２節において取り上げた、０の掛け算、特に「ｎ×０」については、一般の掛け算である「ｎ×ｍ」の初等教育上の意味が確実に身についていることと、また「０」の意味を掛け算の意味操作において拡張するということを理解していないと、なかなかイメージが確定しないことも分かる。また、一度この概念を獲得すると、いろいろな単位あたりの量（ｎの段）について、「ｎ×０」を、むしろ興味を持って考えていくことができることも分かる。この、「ｎ×０」については、５～６年ほど前より、掛け算の意味と関連して、その表現を学生にも考えてもらう試みを授業の中でおこなっているが、教職を志望している学生においても、その絵や言葉などの表現から、理解が定まらない場合も少なくないことが見受けられた。

そこで、今年度については、特に本学において次の事を意識して、授業の展開を図った。

その１．「ｎ×０」を考えるアプローチを具体的な事例で示すこと。
その２．単位あたりの量として、ｎにより異種となる場合（自然物）で考えること。
その３．「ｎ×０」と「０×ｎ」の違いについて、具体的な事例で考えること。

この、**その１**や**その３**は、以前より授業の中で示したり、学生が考える機会をとっているものであるが、その途中において、学生の理解を確認したり、質問を受けるなどの機会を設け、よりインタラクティブな方法をとった。そして、**その２**については、単位あたりの量について、事例となる様々な自然物、また、時には人工物であっても、それを考えて挙げてもらい、その一つずつに対して、各自が「ｎ×０」を考えてみるという展開にした。そのことにより、場合場合に応じて（学生の考えた様々な１あたり量に対応して）、いくつかの環境や状況設定の事例を挙げるようにした。

本学における、文学部児童教育学科の３年次の科目である算数科教育法における実践で、こ

の「ｎ×０」が全体を通して（いろいろなｎにおいて)、すべて表現できている場合と、表現がうまくなされていない（部分的に途中段階もしくはできてない）場合とに分けると、３年前にあたる学生のレポート結果に比べて、次のような違いが出ていることが分かった。

	すべて表現できている	表現が部分的に途中段階もしくはできていない	合計
2010年度	45名（62%）	28名（38%）	73名（100%）
2013年度	87名（80%）	22名（20%）	109名（100%）

括弧内の割合は、その年度における本授業の受講者全体に対する割合である。表現ができていない場合とは、記されていない、また、多くは「０×ｎ」と混同している場合である。「表現が部分的に途中段階である」というのは、ｎが６の場合において、カブトムシや蟻を取り上げて、「足がすべて抜けてしまった状態」という表現として、カブトムシや蟻の身体のみを示していたり、同様に、ｎが８の場合に蛸を取り上げて、「足をすべて食べてしまった」という表現に相当する場合である。

これらの結果の違いにおいて、上記の取り組みを意識した今年度においては、すべて表現できている場合の割合が多くなっていることが分かる。この差については、統計的に母比率の検定をすると検定統計量は2.69となり、有意水準0.4%で有意差を示している。すなわち、上記の取り組みの、**その１**、**その３**の相互的な展開と合わせて、教育現場における課題と関連させた、**その２**の取り組みの効果が大きいことを主張できると考えられる。

その３の「ｎ×０」と「０×ｎ」の違いについては、これまで関連性を持って提示するとしても、例えば「３×０」は３輪車が１台もない状況における車輪の数、「０×３」は誰も乗っていない３輪車が３台ある状況における乗っている人の数という設定等であった。今後は、「３

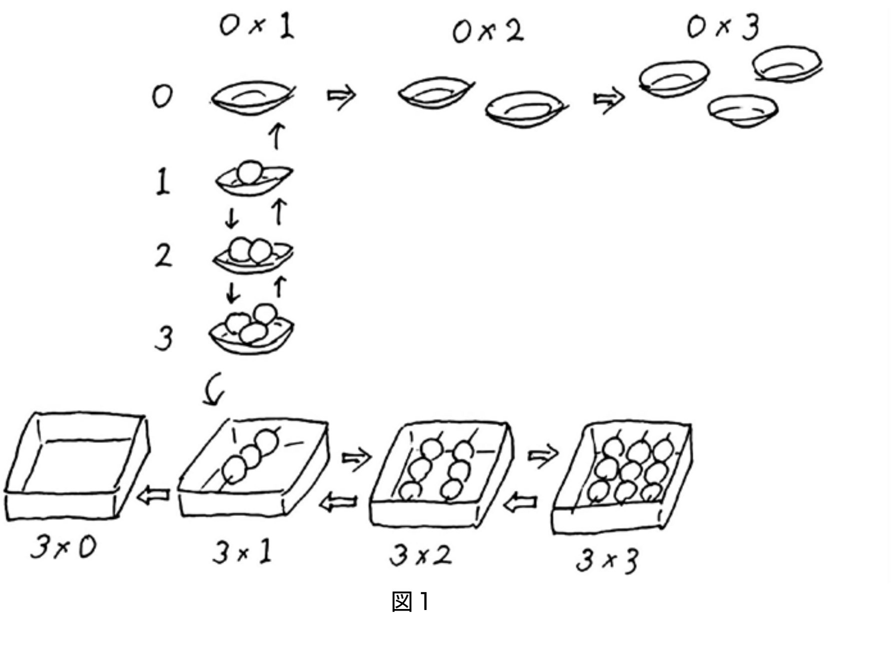

図１

色だんご」や「５色セットのだるま」といった、ｎによって同種としても表現できるが、人工物の数の特性があるという場合において、関連性を設定することが効果的ではないかと考えている（**図１**）。

この「ｎ×０」の文章作りについて、本学でこれまで５年間開催している教員免許状の更新講習において紹介をすると、分かりやすい事例だと思うので、実践に取り入れてみたいという肯定的な現場のご意見を本年度いただくことができた。しかし、教科書を中心にして内容を進める必要性についての現場のご意見も、またいただくことができた。

５．まとめ

本稿においては、児童における小学校の学びのなかでの０の意味、そしてまた、学生に対する初等教育における０の掛け算について、その意味を中心に考えてきた。０の意味を知ることは、数というものを理解することにつながり、また、足し算・引き算の意味と、そこにおける違いを把握するということは、０のある足し算・引き算にも理解が反映され、むしろその節目として、この０の演算を考えることができる。特に、０の掛け算において、「ｎ×０」の事例については、ほとんどすべてが似通っている現在の状況も理由となり、現場の先生方も、他の例を考える余地も、その拡張の意味も却って捉えにくくなっていることが危惧される。この、「０」が含まれた場面についての、状況や環境設定を考えるということは、「０」を含んでいない場合についても、足し算や引き算、そして、掛け算の教育上における意味が把握され身についているか、ということにつながっているといえる。すなわち、これらの違いを意識でき、理解をして、計算につなげている場合であれば、この「０」のある演算の場合にも、その場面や状況を表現していくことができるといえる。この「０」がある場合の計算を、「何も足さない」、「何も引かない」、すなわち「何も変化しない」、あるいは「何でも０にする」ということで、簡単なラッキー問題と子どもに感じさせることよりは、演算の意味を考えてから、計算に入り、意味を忘れかけてしまう頃に、この「０」を節目にして、その意味を再確認して理解を深める、また、話題や場面、状況を考えて話をつくってみる、という展開ができる方が、本当は子どもも興味付き、いろんな違いも出て来て、そして「０」の意義に近いのではないかと考えている。

引用文献

１）高橋誠：かけ算には順序があるのか、岩波書店（2011年）
２）C.カミイ他：子どもたちが発明する算数、大学教育出版（2003年）

参考文献

１）銀林浩：ここが問題　いまの算数教育－小学校中学年編－、国土社（1992年）
２）黒木哲徳：入門算数学　第２版、日本評論社（2009年）
３）C.カミイ、加藤泰彦：ピアジェの構成論と幼児教育Ｉ、大学教育出版（2008年）

Summary

In the present study, we examined a case where zero was used in mathematical education. We attempted to teach university students the meaning of calculation, especially

multiplication involving zero, which represents a number showing the absence of objects. This activity enhanced the students' awareness of the concept of zero. We also discussed the case in which a quantity was multiplied by zero and the case in which zero was multiplied by a quantity, whereby expanding the concept of zero.