線形順序集合における連続性

林　真護

Continuity in Linearly Ordered Sets

Shingo HAYASHI

線形順序集合

空でない集合 L の元 α，β，γ の間の関係Ⓡが

① $\alpha Ⓡ \alpha$ （反射性）

② $\alpha Ⓡ \beta \wedge \beta Ⓡ \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ （対称性）

③ $\alpha Ⓡ \beta \wedge \beta Ⓡ \gamma \Rightarrow \alpha Ⓡ \gamma$ （推移性）

をすべて満たすとき，LをⓇによる順序集合という．さらに順序集合において

④ $\alpha Ⓡ \beta \vee \beta Ⓡ \alpha$ が真であるとき，Ⓡを線形順序関係，L をⓇによる線形順序集合という．

整数において定義した2項関係（大小・相当）$\leqq$[1] は，①，②，③，④を満たすから線形順序である．したがって，この$\leqq$については

$\alpha \leqq \beta \wedge \alpha \neq \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$，$\sim(\alpha \leqq \beta) \Leftrightarrow \beta < \alpha$であるから

$\beta < \alpha$を$\alpha > \beta$と書けば，線形順序集合の元の間には，$<$か，$=$か，$>$かのいずれか1つだけ成り立つ．

一般の集合で定義する包含関係$\subseteq$は，

①′ $A \subseteq A$

②′ $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$

③′ $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

をすべて満たすから順序関係であり，$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$ であるけれども

$A \subseteq B$ または $B \subseteq A$ の少なくとも一方が恒に成り立つとはいえない．

すなわち，

④′ $A \subseteq B \vee B \subseteq A$ がトートロジ（tautology）ではないから，線形順序ではない．

同じ型の2つの実行列 $A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$ について，対応する元が，それぞれすべて $a_{ij} = b_{ij}$　$A = B$, $a_{ij} < b_{ij} \Rightarrow A < B$ と定義すれば，その大小・相当関係$\leqq$は，明らかに順序関係になるけれども，例えば

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ では $A < B$ も $A = B$ も $A > B$ も成り立たない．

したがって行列における関係≦は線形順序関係ではない.

複素数$a+bi$は，実行列$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$で表現されるから，複素数の集合は，この型の行列の集合と同型（代数的構造が同じ）であり，大小・相当関係をこのように定義しても≦は線形順序関係とはなり得ない.

有理数と実数

(1) 有理数

Zを整数としa, $b\in Z$;$a\neq 0$のとき$ax=b$の解xを有理数といい，記号b/aと表示して，これを分数という.

2つの分数b/aとd/c $(a, b; c, d\in Z : ac\neq 0)$とは

$ad=bc$のとき　同値$b/a\equiv d/c$と定義すれば

$b/a\equiv b/a$

$b/a\equiv d/c \Rightarrow d/c\equiv b/a$

$b/a\equiv d/c \wedge d/c\equiv f/e \Rightarrow b/a\equiv f/e$

が証明されるから，有理数はすべて，その分数類の各代表（既約分数）によって一意的に表示される.

有理数の集合をQとし

正負：$ab>0 \Leftrightarrow b/a>0$, $ab<0 \Leftrightarrow b/a<0$
加法：$b/a+d/c=(bc+ad)/ac$
乗法：$(b/a)\times(d/c)=bd/ac$　　　　と定義すれば

Qは関係≦による線形順序集合となり，Zで成り立った演算法則は，すべて，そのままQで成り立ち，

$p, q\in Q \Leftrightarrow \{p<(p+q)/2<q\} \wedge \{(p+q)/2\in Q\}$ だから

任意の2つの有理数の間には無数に多くの有理数が存在する.（稠密性）

(2) 実数

有理数の集合Qは関係≦について線形順序集合であるから，次の3条件

① $A\neq\phi\wedge B\neq\phi\wedge A\cup B=Q$
② $(a, b\in Q)\wedge(a\in A, b\in B) \Leftrightarrow a>b$
③ Aに最小元（有理数）がない.

を満たすようなA（上組）とB（下組）との組分けが可能であり，有理数の稠密性から

㋐ Bに最大元がある
㋑ Bに最大元がない

かの，いずれか一方だけが成り立つ.

この組分けを有理数の切断といい$(B|A)$と書く．切断$(B|A)$に対し㋐の場合には，Bか

ら最大元を除いたものを B_0，$A=A_0$として；㋑の場合には，$B=B_0, A=A_0$とする．

大小・相等関係≦は

$(B|A)\ =\ (D|C) \Leftrightarrow A_0=C_0$

$(B|A)\ <\ (D|C) \Leftrightarrow A_0\supset C_0$　　と定義すれば

$(B|A)\ =\ (D|C)$ か，$(B|A)<(D|C)$ か，$(B|A)>(D|C)$ のいずれか1つだけが成り立ち切断の集合は≦による線形順序集合になることが証明される．

加法：$A_0+C_0=\{x+y\,;x\in A_0,\ y\in C_0\}=E_0,\ F\in Q\wedge F\notin E_0$とし

$(B|A)\ +\ (D|C)\ =\ (F|E_0)$ と定義

乗法：$(B|A)\ \geqq 0,\ (D|C)\ \geqq 0$に対し

$\{xy\,;x\in A_0,\ y\in C_0\}=A',\ B'\in Q\wedge B'\notin A'$とし

$(B|A)(D|C)\ =\ (B'|A')$ と定義

すれば，加法・乗法の交換則，結合則，分配則；減法・除法の可能性が証明できる．

有理数の切断 $(B|A)$ を実数と定義すると，実数の集合 R における大小・相等関係，演算法則が有理数の集合 Q，整数の集合 Z，自然数の集合 W の場合と同様に成り立つことが分かる．

(3) Dedekind の意味での連続性

有理数の切断 $(B|A)$ で実数を定義したが，その実数の集合 R においても同様に切断 $(\mathfrak{B}|\mathfrak{A})$ を作れば，その集合は関係≦による線形順序集合となり，

㋐ 上組 $\mathfrak{A}$ に最小元がなく，下組 $\mathfrak{B}$ に最大元がある

㋑ 上組 $\mathfrak{A}$ に最小元があり，下組 $\mathfrak{B}$ に最大元がない

のいずれか一方だけが成り立つことが証明される[2)]．

いま，$\mathfrak{B}_0$を上に有界な集合とし，その上界の全体を $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}$ に属さない元の全体を $\mathfrak{B}$ とすれば切断 $(\mathfrak{B}|\mathfrak{A})$ が作られ $\mathfrak{B}$ に最大元 β_0 があるとすると，

$\{\forall x\in\mathfrak{B} \Rightarrow x\leqq\beta_0\}\wedge\mathfrak{B}_0\subset\mathfrak{B}$だから$\forall x\leqq\quad\wedge\, x\leqq\beta_0$となり，

β_0が$\mathfrak{B}_0$の上界の元となるから$\beta_0\in\mathfrak{A}$　これはβ_0が $\mathfrak{A}$ の元であることに矛盾する．ゆえに $\mathfrak{B}$ に最大元はない．したがって $\mathfrak{A}$ に最小元（上限）が存在する．

これは，いわゆるDedekindの意味での実数の連続性[3)] であるが，この性質から

「上に有界な集合には最小の上界（上限）が存在する」

「上に有界な単調増加数列は収束する」ことになり　　同様にして

「下に有界な単調減少数列は収束する」ことになる．

また，これらの性質は Archimedes の公理と，いわゆる区間縮小法

「数列 $a_1\leqq a_2\leqq\cdots\cdots\leqq a_n\leqq\cdots\cdots$

$b_1\geqq b_2\geqq\cdots\cdots\geqq b_n\geqq\cdots\cdots$

$a_n\leqq b_n\ \ (n=1,2,\cdots\cdots\cdots)$

に対し

$\lim\limits_{n\to\infty}\ (b_n-a_n)\ =0$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n(=\alpha)$」

とをあわせたものと同値であることが証明され，これが実数の小数による表示法の根拠になる．

実数の小数表示

簡単のために二進位取り記数法で考える．（普通は十進位取り記数法であれけれども一般に n 進法としても同様の理論が成り立つ）

$0 \leqq x < 1$, $x \in R$ として半開区間［0, 1）を２つの区間［0, 1/2),［1/2, 1）に分けると，x はこのうちのどれか１つだけに属している．x の属している区間を

$[a_1/2,\ (a_1+1)/2)$,（a_1は０か１）とする．

$[a_1/2,\ (a_1+1)/2)$ を $[a_1/2,\ a_1/2+1/2^2)$, $[a_1/2+1/2^2,\ a_1/2+(a_1+1)/2)$ に分けると，x はこのうちのどれか１つだけに属している．x の属している区間を

$[a_1/2+a_2/2^2,\ a_1/2+(a_2+1)/2^2)$,（$a_2$は０か１）とする．

以下同様にして

$x \in [a_1/2+a_2/2^2+\cdots\cdots+a_n/2^n,\ a_1/2+(a_2+1)/2^2+\cdots\cdots+(a_n+1)/2^n)$ となるように（$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$は０か１）を定めることができる．

$a_1/2+a_2/2^2+\cdots\cdots+a_n/2^n=x_n$, $x_n+1/2^n=y_n$とおくと

$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots \leqq x_n \leqq \cdots\cdots \leqq x \leqq \cdots\cdots \leqq y_n \leqq \cdots\cdots \leqq y_2 \leqq y_1$

$\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}=x$

すなわち $x=\sum_{n=1} a_k/2^n$（a_kは０か１）

これを $x=(0.a_1 a_2\cdots\cdots a_k\cdots\cdots)_2$と書く．（２進小数）

有限小数　例えば $(0.1)_2$は，$(0.01111\cdots\cdots)_2=(0.0\dot{1})_2$のように循環無限小数として一意的に表示されるから，集合 R の元はすべて一意的に二進位取り記数法で（無限）小数として一意的に表示される．

（例）

$3/4=(0.75)_{10}=1/2+1/2^2=(0.11)_2=(0.10\dot{1})_2$

$1/3=(0.\dot{3})_{10}=1/2^2+1/2^4+\cdots\cdots=(0.\dot{0}\dot{1})_2$

$\sqrt{2}=(1.414\cdots\cdots)_{10}$

$(0.414\cdots\cdots)_{10}=1/2^2+1/2^3+1/2^5+1/2^7+\cdots\cdots=(0.0110101\cdots\cdots)_2$

だから

$\sqrt{2}=(1.0110101\cdots\cdots)_2$

$\pi=(3.141\cdots\cdots)_{10}$

$(0.141\cdots\cdots)_{10}=1/2^3+1/2^6+1/2^{11}+\cdots\cdots=(0.00100100001\cdots\cdots)_2$

だから

$\pi=(11.00100100001\cdots\cdots)_2$

以上の所論から

{整数の集合 Z} ⊂ {有理数の集合 Q} ⊂ {実数の集合 R} であり，
Z も Q も R も大小・相等関係≦による線形順序集合であるが，位相的には，Z は分散性，Q は稠密性，R は連続性によって特徴づけられ

有理数 ⇔ 分数で表示される．実数 ⇔ 小数で表示される．ことが明白である．

整数・分数・小数

小学校指導書算数編（文部省）のp. 110に「整数，小数，分数の関係を理解させる方法の一つに，整数や小数には必ずそれに対応する分数がつくれるということがある」（5年）

p. 111に「……分数を整数や小数として表したりすることも取り扱う内容となっている．この場合，分数には整数や小数では表せないものもあることに気づかせるようにすることが必要である」（5年），p. 128に「……，いくつかの数についての乗法，除法の計算を一つの分数の形にまとめることは，整数，小数がすべて分数で表せることと，分数の乗法，除法の計算はすべて乗法だけの計算に直せることから導くことができる．……」（6年）

p. 129に「……，分数の形で表されている数は，整数はもちろん，常に小数の形で表すことができるとは限らない．これらのことから，分数の形で表される数（有理数）の集合は整数の集合または小数で表される数の集合を含むとみられることなど，これらの数の関係をまとめること……」（6年）などと示しているが，中学・高校の数学では$\sqrt{2}$のように，「分数の形で表せない数を無理数という」とか「有理数と無理数とをあわせて実数という」とかいうように指導するのに混迷を来たし，支障を生じる．

勿論 $X=2^{\omega}$と $Y=\omega^{\omega}$の正則開集合のなす完備ブール代数は同型で

2進小数と連分数との対応

$$a, i_1\, i_2\, i_3 \cdots\cdots i_n \cdots\cdots = n_0+\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{n_3+\cfrac{1}{n_4+\cdots\cdots}}}}$$

も考えられる[4]が，分数というのは有理数の表示法であって，分子，分母が整数であること，したがって連分数は分数の概念には包摂されないこと，小数には，きっちりした小数（有限小数）の他に1/3を小数に直して0.333……としたもの（循環無限小数）や，円周率πのように3.141592……とくり返えしのない無限小数（非循環無限小数⇔無理数）のあることは小学生にでも気づかせる必要があり，{整数の集合}⊂{分数の集合}⊂{小数の集合}の関係を算数科でも，まとめさせるべきである．

文　　献

1）林　真護：名古屋女子大学紀要，32，80～81（1986）
2）竹之内脩：集合・位相，137，筑摩書房（1970）
3）高木貞治：数の概念（新版）53，岩波書店（1978）
4）西村敏男・難波完爾：公理的集合論，161，共立出版（1985）
5）小学校指導書　算数編　文部省（昭和53年5月）
6）中学校指導書　数学編　文部省（昭和53年5月）
7）高等学校学習指導要領解説　数学編・理数編（昭和54年5月）