中心極限定理を巡って

――T スコアーの教育的有効性――

林　　真護

Centering around the Central Limit Theorem

――The Educational Efficiency of T-Score――

Shingo HAYASHI

Abstract

The function $f: x \to e^{-x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$ representing a symmetrical hanging graph about the straight line $x=0$ is $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$. It deduces the continuous variable Z probability density function $p(z) = e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}$ $(-\infty < z < \infty)$ according to $N(0, 1^2)$, the standard normal distribution. I deduce the variable X probability density function

$$f(x) = e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}/\sqrt{2\pi}\sigma \quad (-\infty < x < \infty), \quad (\sigma > 0)$$

according to $N(m, \sigma^2)$, the normal distribution from the relation between the continuous variable Z probability density function and the discrete variable X probability density function

$$p_n(x) = {}_nc_x p^x(1-p)^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, \cdots, n), \quad (0 \leqq p \leqq 1)$$

according to the binominal distribution.

Using these functions, I analyze the Z-score : $z = (x - \bar{x})/s$ which is used as the standardized raw score in the fields of pedagogy and psychology nowadays and the T-score : $t = 50 + 10(x - \bar{x})/s$ which is ofen used at lessons as the practical application on the basis of the central limit theorem

$$\lim_{n\to\infty} P(\alpha \leqq \sqrt{n}(\bar{x} - \mu)/\delta \leqq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(z)dz$$

(μ : population mean, δ : population variance and $\bar{x}$: sample mean) consisting in the connection betwoon the population and the sample. I conclude by considering the mathematical significance and educational efficiency for the practical application.

$$\boldsymbol{p(z)=e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}} \quad (-\infty<z<\infty) \qquad \cdots\cdots(1)$$

n を自然数として $s_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$ とおくと

$$s_n=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=(n-1)s_{n-2}-(n-1)s_n$$

$$\therefore \quad s_n=\{(n-1)/n\}s_{n-2} \quad (n\geqq 2),\ s_o=\pi/2,\ s_1=1$$

$$s_{2n}=(2n-1)(2n-3)\cdots\cdots 1\cdot\pi/2n(2n-2)\cdots\cdots 2\cdot 2, \qquad \cdots\cdots①$$

$$s_{2n+1}=2n(2n-2)\cdots\cdots 2/(2n+1)(2n-1)\cdots\cdots 3, \qquad \cdots\cdots②$$

$$\therefore \quad \{\pi/2\}\{s_{2n+1}/s_{2n}\}=2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots\cdots 2n\cdot 2n/1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)(2n+1), \qquad \cdots\cdots③$$

$0<x<\pi/2$ なら $0<\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x$ だから

$$0<s_{2n+1}<s_{2n}<s_{2n-1}$$

$$1<s_{2n}/s_{2n+1}<s_{2n+1}/s_{2n}=(2n+1)/2n \qquad \lim_{n\to\infty}s_{2n+1}/s_{2n}=1 \qquad \cdots\cdots④$$

$$\therefore \quad \pi/2=\prod_{n=1}^{\infty}2n\cdot 2n/(2n-1)(2n+1) \qquad \text{(Wallisの公式)}\cdots\cdots⑤$$

①，② から $s_{2n}/s_{2n+1}=\pi/(4n+2)$ だから $s_{2n+1}\sqrt{s_{2n}/s_{2n+1}}=\sqrt{\pi/(4n+2)}$
ゆえに ④ より

$$\sqrt{\pi}/2=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,s_{2n+1} \qquad \cdots\cdots⑥$$

x を $\cos x$ と変換 $s_{2n+1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx=\int_0^1(1-x^2)^n dx$

x を $\cot x$ と変換 $s_{2n-2}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}x\,dx=\int_0^{\infty}1/(1+x^2)^n dx$

ここで $e^x=1+x+x^2e^{\theta x}/2 \quad (0<\theta<1)$ より $1-x^2<e^{-x^2}$

$e^{x^2}>1+x^2$ より $e^{-x^2}<1/(1+x^2)$ だから

$x\neq 0$ なら $1-x^2<e^{-x^2}<1/(1+x^2)$ ゆえに $\mathrm{I}=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{n}\int_0^{\infty}e^{-nx^2}dx$ とおけば

$\sqrt{n}\int_0^1(1-x^2)^n dx<\mathrm{I}<\sqrt{n}\int_0^{\infty}1/(1+x^2)^n dx$ すなわち $\sqrt{n}\,s_{2n+1}<\mathrm{I}<\sqrt{n}\,s_{2n-2}$

④，⑥ より $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,s_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,s_{2n-2}=\sqrt{\pi}/2 \qquad \therefore \quad \mathrm{I}=\sqrt{\pi}/2$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} \qquad \cdots\cdots⑦^{(注1)}$$

$p(z)=e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}\ (-\infty<z<\infty)$ とすれば $p(z)$ は $[\alpha,\beta]$ において連続であり，$p(z)\geqq 0$ かつ ⑦ の結果を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(z)dz=1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz=\sqrt{2\pi}/\sqrt{2\pi}=1 \qquad \cdots\cdots⑧$$

$P\,(\alpha\leqq z\leqq\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}p(z)dz$ とすれば $p(z)$ は Z の確率密度関数 pdf となり，Z の平均は

$E[Z]=\int_{-\infty}^{\infty}zp(z)dz=1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ze^{-z^2/2}dz=0$（$\because$ 奇関数）

分散は $V[Z]=E[\{Z-E[Z]\}^2]=E[Z^2]=\int_{-\infty}^{\infty}z^2p(z)dz=\int_{-\infty}^{\infty}\{-zp'(z)\}dz$

$$=[-zp(z)]_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}p(z)dz=1$$

$pdfZ=p(z)$ である Z の分布 (標準正規分布) を $N(0,1)$ と略記する.

$$\boldsymbol{f(x)=e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}/\sqrt{2\pi}\,\sigma} \quad (-\infty<x<\infty) \qquad \cdots\cdots(2)$$

$f(x)$ は $[a,b]$ において連続であり, $f(x)\geqq 0$ かつ ⑧ の結果を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}\,dz=\int_{-\infty}^{\infty}p(z)dz=1$$

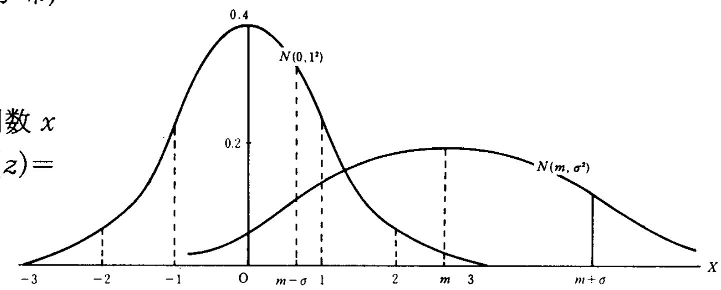
$P\,(a\leqq x\leqq b)=\int_a^b f(x)dx$ とすれば $pdfX=f(x)$

平均 : $E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(m+\sigma z)e^{-z^2/2}dz=m$

分散 : $V[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2f(x)dx=1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2z^2p(z)dz=\sigma^2$

標準偏差 : $D[X]=\sigma$

$pdfX=f(x)$ である X の分布 (正規分布) を $N(m,\sigma^2)$ と略記する.



〔図1〕

一般に $pdfX=f(x)$, $z=h(x)$ で逆関数 $x=h^{-1}(z)$ が存在するなら $pdfZ=g(z)=[f(x)|dx/dt|]_{x=h^{-1}(z)}$ であるから

X が $N(m,\sigma^2)$ に従うなら

$Z=(X-m)\sigma$ は $N(0,1)$ に従い,

$Z=aX+b$ は $N(am+b,\,a^2\sigma^2)$ に従う. $\cdots\cdots(3)$

$$\boldsymbol{p_n(x)={}_nc_xp^xq^{n-x}} \quad (x=0,1,2,\cdots,n),\ (0\leqq p\leqq 1,\ q=1-p) \qquad \cdots\cdots(4)$$

2項分布をする離散的確率変数 X について, n 回の試行のうち, その事象が起こる回数を x_i とすると $P(X=x_i)=p_n(x_i)$ だから, これを $p_i\,(i=0,1,2,\cdots,n)$ とすると $\sum_i p_i=1$ で

平均 : $E[X]=\sum_i x_ip_i=np$

分散 : $V[X]=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2=np(1-p)=npq$

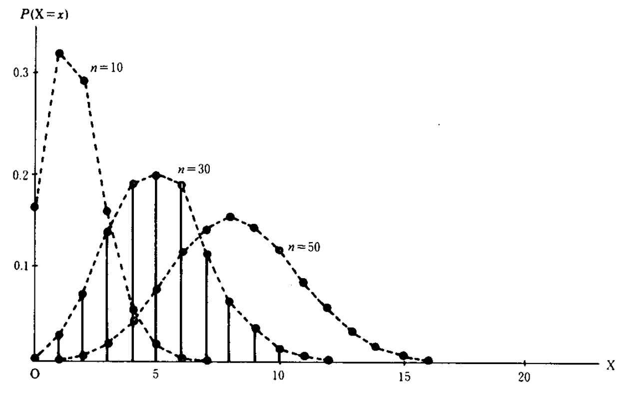
標準偏差 : $D[X]=\sqrt{npq}$

2項分布を $B(n,p)$ と略記する.

$$\lim_{n\to\infty}p_n(x)/p(z)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}P(\alpha<(x-np)/\sqrt{npq}<\beta)=\int_\alpha^\beta p(z)dz$$

(A. de Moivre—P. S. Laplace の極限定理) によって $\lim_{n\to\infty}B(n,p)=N(0,1)$



〔図2〕

〔図2〕は $B(n,1/6)$ のグラフであるが, $n>30$ くらいで2項分布が正規分布によく近似する.

一般に $B(n, p)$ は $p \leqq 0.5$, $np>5$ であれば，かなりよく $N(np, npq)$ に近似することが計算されるが，三上操氏も「p が 0 または 1 から，かなり遠いときは，近似は迅速で，$n=15\sim20$ くらいで，よい近似が得られる．p が 0 や 1 に近いときは n はかなり大きくなければならない」(注2) といっている．

母集団と標本　……(5)

平均 μ, 分散 δ^2 の母集団 (大きさ N) から，ランダムに n 個の標本を非復元抽出したときの標本平均が $\bar{x}$，標本分散が s^2 あると

$$E[\bar{X}]=\mu, \quad V[\bar{X}]=\{\delta^2/n\}(N-n)/(N-1) \qquad \cdots\cdots①$$

無限母集団のとき，または有限母集団でもランダムに復元抽出をするときは

$$\lim_{n\to\infty}(N-n)/(N-1)=1 \text{ より } V[\bar{X}]=\delta^2/n \qquad \cdots\cdots②$$

$$\{n/(n-1)\}s^2=u^2 \text{ とすると } E(U^2)=\delta^2 \qquad \cdots\cdots③$$

が証明される．

中心極限定理の適用誤差

$$\lim_{n\to\infty}P(\alpha\leqq\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)/\delta\leqq\beta)=\int_\alpha^\beta p(z)dz \qquad \cdots\cdots(6)$$

ただし $p(z)=e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}$　$(-\infty<z<\infty)$

$\bar{x}=1/n\sum_{i=1}^{n}x_i$,　$x_i\in X$,　μ は母平均，δ^2 は母分散

(5) の ①，② より $E[\bar{X}]=\mu$,　$V[\bar{X}]=\delta^2/n$ に近似する (n がある程度大なら).

母平均 μ を標本平均 $\bar{x}$ から推定するには (6) により

$$\mu=\bar{x}\pm1.96\times\delta/\sqrt{n} \quad (\text{有意水準 } 5\,\%)$$

$$\mu=\bar{x}\pm2.58\times\delta/\sqrt{n} \quad (\text{有意水準 } 1\,\%)$$

であるけれども母分散 δ^2 が未知であれば，標本分散 s^2 で代用しなければならない．$\bar{X}$ の確率分布が $B(n, p)$ に従い，$p=1/6$ なら (4) の諸論から $n>30$ くらいでよいと考えられる．中心極限定理の適用において，ある程度 n が大きくなければ，有意性は保証されない．

母集団 X の確率分布は，積率母関数 $M_x(\theta)\equiv E[e^{\theta x}]=\sum_{i=1}^{k}e^{\theta x_i}p_i$ または $\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta x}f(x)dx$ が定まれば一意に確定する(*3) けれども X の確率分布のちがいにより，適用の有意性は標本数 n の値によって異なってくる．

標本数が少ない場合，X が互いに独立に正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うならば，それから採つた n 個の標本の標本平均 $\bar{x}$ について

$$t=\sqrt{n-1}(\bar{x}-m)/s \quad (s^2 \text{ は標本分散，} n \text{ は標本数})$$

を作れば，t は確率密度関数

$$f(t)=\{1/\sqrt{(n-1)\pi}\}\{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)/\Gamma((n-1)/2)\}\{1+(t^2/(n-1))\}^{-n/2} \quad (\text{自由度 } n-1)$$

の t 分布をするから，例えば，測定値 (標本) から，製品 (母集団) の長さを推定するとか，有意

性を検定するとかの場合には $n=10$ くらいで十分と考えられる．

T スコアー：$t=50+10(x-\bar{x})/s$ について

学力テストの素点 x を $E[X]=50$，$V[X]=10^2$ に標準化した，この t 得点を，z 得点ということもあり(注4)，これを z 得点の分布が正規であれば，これを t 得点という(注5) こともあるが，本論文では CRONBACH(注6) に従い

Z スコアー：z=(素点－平均点)/(標準偏差)

T スコアー：t=50＋10(素点－平均点)/(標準偏差)

とする．

テストの平均点や，標準偏差は，問題の難易度によって変わり，A 科目と B 科目とで，素点が同じ 65 であっても，両科目の平均点または標準偏差が異なれば，価値が等しいとはいえない．T スコアーに標準化すれば同一尺度で測定することになり，両科目の問題の難易差による得点の不合理が除去される．従って，例えば大学入学試験などで，必修科目 (全員受験) について，科目間にある程度の得点差 (平均点の差) がある場合には，T スコアーに標準化しなければならない．

得点差の許容範囲は，そのテストの受験者の質によっても異なるであろうから，統計的な解析を行う必要があるけれども，一応平均点で 5 %以内とみて十分であろう．

一般にアプチチュード・テストは，正規分布をするけれども，アチーブメント・テストは正規分布しないことも多い．従って T スコアーも必ずしも正規分布するとは限らないけれども，もし正規分布 $N(50, 10^2)$ に従うならば

$t<35$ (6.68%)，$35\leqq t<45$ (24.17%)，$45\leqq t<55$ (38.30%)，
$55\leqq t<65$ (24.17%)，$65\leqq t$ (6.68%)

となり 5 段階評価の根拠として (相対評価) 有効である．

熊本芳朗氏(注7) によれば，電機通信大学における「大学入学後の成績と共通第 1 次学力試験にしても，2 次試験にしても，選抜試験成績 (共通第 1 次学力試験成績と第 2 次試験成績とを加算したもの) との順位相関係数の間に差異はまったく認められず，いずれの場合も順位相関係数は高々0.2 程度と非常に低く，入試成績と入学後の成績との間には，ほとんど関連がないことが判る．(中略) 入学後の成績との関連を求めての入学試験としては，共通第 1 次学力試験も，第 2 次試験も残念ながら相関は高くない．入学後の成績は入学試験で測れる学力と余り相関がない」

学生の学力 (能力) を入学後の変動予測を含めて，測定しようとするには，共通第 1 次学力試験にしても，2 次試験にしても，両者加算の選抜試験にしても，その試験の得点だけでは殆んど無力であるといえよう．素点を t 得点に標準化しても同様で，それは受験者を，その時点で選別するための 1 つのデータとして，T スコアーは素点よりは合理的であり有効であるというだけであり，将来予測の観点からは，その数値だけでは教育的有効性があるとはいえない．

素点の標準化として，順位を規準としたパーセンタイル法，エントロピーを考えた合理的な E 得点(注8) にしても同様であろう．

学力テストは，各科目の平均点，標準偏差が，試験問題の難易度に基づく成分，受験者群の学力差に基づく成分，その他 (残差) の成分の 3 つに分解され，清水留三郎氏の共通 1 次試験の「社会」と「理科」の選抜科目間における差異の統計解析(注9) などでもうかがえるように各科目をそれぞれ単純に T スコアーに標準化すると，その科目を選択した受験者群の学力差に基づく

成分を除去してしまい，t 得点を加算して総合判定をすることは極めて不合理である．

選択科目間の平均点の差異については，塗師斌氏(注10)の「Tockerの方法による共通第1次試験の「社会」と「理科」の選択科目間の等化」などの論文もあるが，例えば国語と数学が必修であれば，それをアンカーテストとして，全受験者(母集団)群における各選択科目の平均点 μ と分散 δ^2 を推定して，$t_0=50+\sqrt{n}(x-\mu)/\delta$ を作れば中心極限定理(6)により有意であり，素点 x のままよりは合理的である．この t_0 は問題の難易度による得点の不合理，受験者群の学力差による得点の不合理が，ともに除去されていると推定できる．

標本数(選択科目の受験者数)がある程度大きければ μ の代わりに標本平均 $\bar{x}$，δ^2 の代わりに標本分散 s^2 を用い，$n=100$ として，素点 x を T スコアー：$t=50+10(x-\bar{x})/s$ と標準化すれば，選択科目間の一応の等化ができる．しかしこれはあくまでも近似値であり，t_0 と t との誤差は，科目の問題によって，実験的に検討して見なければならない．

参　考　文　献

(注1)　高木貞治　1983　解析概論改訂第3版(岩波書店) p.p. 132～134

(注2)　三上操　1975　統計的推測(筑摩書房) p. 110

(注3)　P. Lévy　1937　Théorie de l'addition des variables aléatoires, Monographies de probabilités, Paris

(注4)　藤田広一　1985　数学科における教育工学(共立出版) p. 76

(注5)　肥田野直・瀬本正敏・大川信明　1961　教育心理統計学(培風館) p. 34

(注6)　LEEJ. CRONBACH　1960　Essentials of Psychological Testing, Second Edition p.p. 80～81

(注7)　熊木芳朗　大学入試研究の動向第4号(国立大学入学選抜研究連絡協議会61年3月) p.p. 15～16

(注8)　藤田広一・永岡慶三　1977　教育データー処理へのエントロピーモデルの適用とエントロピー関数の応用　電子通信学会論文誌 Vol. 60-D No. 4

(注9)　清水留三郎　1983　大学入試センター研究紀要 No. 6

(注10)　塗師斌　1983　83：大学入試フォーラム No. 1 (大学入試センター) p. 88