度数がすべて3の原始的，対称な Association scheme の固有値と重複度について

岩 根 博 之

On Eigenvalues of Symmetric Association Schemes with Valency 3

Hiroshi IWANE

Abstract

Let B_1 denote an intersection of d-class symmetric association scheme with valency k_1=3. Applying the intersection matrix B_1, we compute the eigenvalue and multiplicity of the primitive symmetric association scheme with valency 3. We study the existence condition for the symmetric association scheme with valency 3.

Introdction

有限集合 X と X 上の $d+1$ 個の関係 R_i ($i=0, 1, \cdots, d$) (すなわち R_i 達は $X\times X$ の部分集合) の組 $\Omega=(X, \{R_i\}_{0\le i\le d})$ で次の4条件（i）-（iv）を満たすものを Association scheme と呼ぶ.

（i） $R_0=\{(x, x)|x\in X\}$

（ii） $R_0\cup R_1\cdots\cup R_d=X\times X$ かつ $R_i\cap R_j=\emptyset$ if $i\neq j$）

（iii） 各 $i\in\{0, 1, \cdots, d\}$ に対して ${}^tR_i:=\{(x, y)|(y, x)\in R_i\}$ と定義する時 ${}^tR_i=R_{i'}$ for some $i'\in\{0, 1, \cdots, d\}$

（iv） $\forall i, j, k\in\{0, 1, \cdots, d\}$ に対して $|\{z\in X|(x, z)\in R_i, (z, y)\in R_j\}|$ は $(x, y)\in R_k$ のもとで (x, y) のとり方によらず一定（$=p_{ij}^k$）．この p_{ij}^k を intersection numbers と呼び，とくに $p_{ii}^0=k_i$ とおき，k_i を R_i の valency と呼ぶ.

さらに ${}^tR_i=R_i(\forall i)$ が満たされるときこの Association Scheme を対称な Association Scheme と呼ぶ．以後対称な Association scheme を扱う.

A_i を R_i に対する隣接行列とする．A_i はその行と列が X の元でパラメータ化されている行列で成分は次のように定義される.

$$(A_i)_{x,y}=\begin{cases}1, & (x,y)\in R_i\\ 0, & (x,y)\notin R_i\end{cases}$$

$A_0, A_1, \cdots, A_d$ については次の関係式が成り立つ.

$$A_0=I \qquad (I\text{は単位行列})$$

$$A_0+A_1+\cdots+A_d=J \qquad (J\text{はすべて }1\text{ の行列})$$

$$^tA_i=A_i$$

$$A_iA_j=\sum_{k=0}^{d}p_{ij}^kA_k \qquad (p_{ij}^k\text{ は intersection numbers})$$

$A_0, A_1, \cdots, A_d$ で生成される代数 $\mathcal{A}=\langle A_0, A_1, \cdots, A_d\rangle$ を Bose-Menser algebra と呼ぶ.

$\mathcal{A}$ は次元が $d+1$ の半単純代数で原始巾等元 $\langle E_0, E_1, \cdots, E_d\rangle$ をもつ.
$E_0, E_1, \cdots, E_d$ は次の関係式を満たす. ただし積はアダマール積になる.

$$E_0=\frac{1}{|X|}J$$

$$E_0+E_1+\cdots+E_d=I$$

$$^tE_i=E_i$$

$$E_i\circ E_j=\frac{1}{|X|}\sum_{k=0}^{d}q_{ij}^kE_k$$

q_{ij}^k は Krein のパラメータと呼ばれる. rank $(E_i)=m_i$ とおいて m_i を重複度と呼ぶ. $q_{ij}^k\geq 0$ が成り立つことは Krein condition と呼ばれる.

$\mathcal{A}$ は2組の基底 $\langle A_0, A_1, \cdots, A_d\rangle$ と $\langle E_0, E_1, \cdots, E_d\rangle$ を持っていることになる. 一方の基底でもう一方の基底を表すと

$$A_i=\sum_{j=0}^{j=d}p_i(j)E_j$$

$p_i(j)$ は A_i の固有値で, $p_0(j)=k_j$ であるから valency は A_j の固有値として重複度1をもって現れる.

$$E_i=1/|X|\sum_{j=0}^{j=d}q_i(j)A_j$$

と表せる.
行列を使って

$$P=(p_i(j)) \quad ((j,\ i)\text{ 成分が }p_i(j))$$

$$Q=(q_i(j)) \quad ((j,\ i)\text{ 成分が }q_i(j))$$

と表すとつぎの関係式等が成り立つ.

$$p_i(0)=k_i,\quad q_i(0)=m_i,\quad \frac{q_j(i)}{m_j}=\frac{p_i(j)}{k_j}$$

これらを使って $PQ=|X|I$ を書き直した 次の関係式がある.
第1直交関係

$$\sum_{v=0}^{v=d}\frac{1}{k_v}p_v(i)p_v(j)=\frac{|X|}{m_i}\delta_{ij}$$

第2直交関係

$$\sum_{v=0}^{v=d}m_vp_i(v)p_j(v)=|X|k_i\delta_{ij}$$

さらに Absolute bound と呼ばれる重複度 m_i と点の個数のあいだのつぎの関係式が成り立つ.

$$|X| \leq \binom{m_i + d - 1}{d} + \binom{m_i + d - 2}{d - 1}$$

Association Sheme が原始的とは各 A_i に対応するグラフが連結になっていることで，逆に非原始的とはグラフが連結でないことである．以上のことを固有値の言葉を使って言い替えると次のようになる．

定理 1(2)　正則グラフが連結ならば valency は重複度 1 で隣接行列の固有値として現れる．

Associatin Scheme が非原始的になることは次が成り立つことと同値になる．(参照 1))

定理 2　Association Scheme が非原始的ならばつぎを満たす整数 s が存在する．$0 \leq i, j \leq s$ ならば，隣接行列の積 $A_i A_j$ は $A_k (k \leq s)$ の一次結合になる．

固有値を計算するのに有用な次の定理が成り立つ．

定理 3(1)　行列 B_1 を　その (j, k) 成分が intersection number p^k_{1j} からなる行列とする．B_1 の固有値は A_1 の固有値と一致する．

具体的に $k_i = 3$ で B_1 を与えられたときにそのパラメータをもつ Association Scheme が存在するための Krein condition よりも簡単な条件について調べてみた．

$k_i = 3$ の場合

クラスの数が d なので点の総数は $|X|=3d+1$ と表せる．固有値を計算するために B_1 の成分 p^k_{ij} についてはつぎのことが成り立つ．

$k_i p^i_{jk} = k_k p^k_{ji}$ と $\Sigma^d_{i=0} p^k_{1i} = k_1$ が成り立つ．$k_1 = 3$ で $p^0_{10} = 1$ なので　$p^1_{11} \leq 2$ になる．
$p^1_{11} = 2$ とする $p^1_{1j} = 0$ $(j \geq 2)$ になる．$p^j_{11} = 0$ $(j \geq 2)$ で primitive に反する．さらに $p^1_{11} = 1$ の場合 A_1 に対応する valency 3 の正則グラフが valency 3 のために $p^1_{11} = 2$ になる点が現れて $p^1_{11} = 1$ に反する．$p^i_{1i} \leq 2$ で $p^i_{1i} = 3$ は $k_i = 3$ に反する．$p^i_{1i} = 1$ は $k_1 = 3$ に反し，$p^i_{1i} = 1$ は $p^1_{11} = 0$ に反する．以上のことから次が成り立つ．

Lemma　最小の valency が 3 の 原始的な Association Scheme を $(\Omega, R_i (0 \leq i \leq d))$ とするとき R_1 の valency 3 とすると $p^i_{1i} = 0$ $(0 \leq \forall i \leq d)$になる．

これで B_1 の対角成分は 0 になり，原始的なことから $p^i_{1j} \leq 2 (i \neq j))$　になる．第 2 直交関係のなかで $p_i(v)$ を A_1 の固有値 α_v におき変える．ただし $\alpha_0 = 3$ とする．　$m = \min\{m_i (1 \leq i \leq d)\}$ とおき，$i = j = 1$　とおくと

$$9 + m \sum_{v=1}^{v=d} \alpha_v^2 \leq |X| k_1$$

重複度 m に関して次の評価が成り立つ．

$$m \leq |X| k_1 / \sum_{v=1}^{v=d} (\alpha_v)^2 - 9$$

固有値が実数であることと Absolute bound と組み合わせることで非存在についての判定条件が得られる．

$\Sigma^{v=d}_{v=0} \alpha^2_v$ は B_1 の固有方程式を $F(x) = x^{d+1} + a_1 x^d + a_2 x^{d-1} + \cdots + a_{d+1} = 0$ とすると

$$\sum_{v=0}^{v=d} \alpha_v^2 = a_1^2 - 2a_2$$

と表せる．
$k_i = 3$ の場合 a_1，a_2 は B_1 を使って計算できる．
$a_1 = TraceB_1$ で $a_1 = 0$ になる．B_1 の固有方程式 $F(x) = 0$ から

$$(d-1)!\, a_2 = \frac{d^{d-1}F(x)}{dx^{d-1}}_{x=0}$$

となる．
右辺は $\det(xI - B_1)$ の微分で $(xI - B_1)$ は対角成分のみに x が現れる．
$d-1$ 回微分すると

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & 0 & * & * \\ 0 & x & \dots & 0 & * & * \\ \vdots & * & \dots & 1 & * & * \\ \vdots & * & \dots & \vdots & x & * \\ 0 & * & \dots & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

の形のものがいくつか現れる．対角には2個だけに x があらわれて他は1が並ぶ．
$p^1_{10} = 3$，$p^0_{11} = 1$，$p^k_{1j} = p^j_{1k}(1 \le j,\ k \le d)$ と $p^k_{1j} \le 2$ から微分して $x = 0$ とおいたとき現れる行列式の項は

$$\begin{pmatrix} x & -1 \\ -3 & x \end{pmatrix}$$

これは $p^0_{11} = 3$，$p^1_{10} = 1$ のところで必ず1個でる．他には

$$\begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x & -2 \\ -2 & x \end{pmatrix}$$

の計3個の type しかでてこない．$x = 0$ とすると，とる値としては -3，-1，-4 しかなく -3 は必ずでてくる．B_1 の成分の和は $3\ (d+1)$ で3が1回と0，1，2がでてくる．B_1 から $p^0_{11} = 3$，$p^1_{10} = 1$ が現れる1行1列をとり除いた行列の1が現れる回数を $2s$，2の現れる回数を $2t$ とおくと $4 + 2s + 4t = 3d + 3$ になる．

$$(d-1)!\, a_2 = -3 - s - 4t = s - 3d - 2$$

$$9 + \sum_{v=1}^{v=d} \alpha_v^2 = 2(3d + 2 - s)/(d-1)!$$

が成り立つ．
　さらに重複度との関係はつぎの式になる．

$$m \le 3(3d+1)(d-1)!/2(3d+2-s) - 9(d-1)!$$

$-9 + 2(3d + 2 - s)/(d-1)! = \Sigma_{v=1}^{v=2} \alpha_v^2$　で　α_v は対称行列の固有値だから実数になり

$$-9 + 2(3d + 2 - s)/(d-1)! > 0$$

になる．
そこで　$d \le 3$ となり，つぎのことが成り立つ．
　命題　$4 \le d$ では valency がすべて3の原始的対称な association scheme は存在しない．
　$d = 3$ とすると　$s = 1$ になり重複度からは否定できないが存在するとしてもかなり少なくな

る．

$d=2$ のとき　$s=1,\ 2,\ 3$ となり重複度から $s=2$ しかでてこない．この場合は点の数が5の Strongly Graph になりほとんど自明なものになる．

参　考　文　献

1) Bannai and Ito : Algebraic Combinatorics I Benjamin 42-184 (1984)
2) N. Biggs : Algebraic Graph Theory Cambridge UNIV press14-15 (1979)
3) Bela Bollobas : Graph Theory Springer-Verlag 155-161 (1979)
4) C. D. Godsil : Algebraic Combinatorics CHAPMAN ¥& HALL 221-259 (1993)
5) A. E. Brouwer, A. M. Choen, and A. Neumaier : Distance-Regular Graph Springer-Verlag 43-78 (1989)