フォール・ナンバーシステムの教育的考察（第1報）

林　　真　護

The Educational Concideration of the Whole Number System (I)

Shingo HAYASHI

§1 序　　論

1,2,3,……という所謂自然数系を N で表し，N に0（零）を添加したものをフォール・ナンバーシステム(Whole number system)といい W で表すことにする*).

近時ブルバギー(N. Bourbaki)の数学では零も自然数としているし，その方が特に集合論と関連して数体系の理論を進めていくためには，より整合的な面があるけれども，零はわれわれが経験的に知っている自然数1,2,3,……の概念よりは，ずっと後から発見されたものであり，小学校算数科でも（自然数という語は用いないけれども）自然数1から5までを指導（5までのかず）の後(10までのかず)を指導する終りの所で（0というかず）を指導するのであるから，本論文では零は自然数系とは別にすることにする.

バートランド・ラッセル(Rusell, 1872—1970)も言うように「人類が2日の2と2匹のキジの2とが同じ2であることに気づくまでには限りない年月が必要だった」ことは確かであるが，数の概念の起源そのものをつきとめることは殆んど不可能である.

また数とは何かということも古来多くの論が行われている．ピタゴラス(Pythagoras, 500B.C.頃）は「数は物の根源で，物以外に存在し，永久不滅である．数なくしては物の存在を許さず，かつ数は万物を支配する原則である」と言い，アリストテレス(Aristoteles, 384-322B.C.）は「数は形状，色彩の如く，物の属性で実在するけれども，ピタゴラスの言う様に他の物から独立に存在する物ではなく，ただ思想上この属性を抽象して得た概念である」と言っている．カント(Kant, 1742-1804)，ショーペンハウエル(Schopenhauer, 1788-1860)は「数は物自身でもなく，又物の属性でもなく，ただわれわれが物を認識する時の形式であって，時間の純粋な直観である」と言い，これに対してヘルバルト(Herbart, 1776-1841)は「数は1個ずつ接続的に加えることによって得られたものであるけれども，数の概念中に時間の概念，要素が含まれているとは言えない．むしろ物の同時共存が数の概念の構成には必要なのである」と言う[1].

またヘルムホルツ(Helmholtz, 1821-1894)はその論文「計量と測定」(Zählen und Messen, 1887）で数を記号と考え，物の集りに対して，おのおのの物に1つずつ記号をあてがって，最後に対応した記号がその物の個数を表すとしている．（河田博士[2]も指摘しているように，彼は数の理論を，すべて論理に還元するのでなくて，基礎の命題，概念，方法を心理学的事実に基く経験の上に建てていて，数学的帰納法による証明のようなものも，何らの断りなしに，証明中に用いていて，純粋に数学としての立場からは不十分な点が少なくない.）数の定義として「数は単位の集りである」とか，「数は計かることの結果である」とか「数は数えることの結

---

*) Whole number を整数（＝integer）と解する場合もあるけれど，ここでは負の整数は含まない.

果である」などと言っても，数えるとか計かるとかいうことの定義がなければ意味をなさない．いずれにしても，数理哲学的立場から，あるいは心理学的見地から，数の概念を考察した数多の説はクロネッカー(Kronëcker, 1823-1891) の有名な言葉「整数は神様がつくり給うた．その他のものはすべて人間の仕わざである」(Die ganzen Zahlen hat der libe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.)にもうかがえるように，数は先験的に与えられたものに基くという意識が潜在しているように思われる．これに対してデーデキント(Dedekind, 1831-1916) は「数とは何か，何であるべきか？」(Was sind und was sollen die Zahlen？1887)において「数は人間精神の自由な創造物」(freie Schöpfungen des menschlichen Geistes)であると述べ，カントール (Cantor, 1845-1920) の創始した集合論を基にして，数の全理論を証明し，数を純粋数学の枠の内に完全に取り入れたと言われている．それにつづくペアノ(Peano, 1858-1932) の自然数についての理論は自然数系 N のもつ順序数としての性質に着目し，それを抽象して自然数を構成した．これに対してラッセルは数を集合の濃度としてとらえて，計量数（集合数，濃度）としての構成をした．またヒルベルト (Hilbelt, 1862-1943)の公理主義の立場からの説，さらに順序数としての数の構成でもフォン・ノイマン(J. von Neumann) の公理論に基く方法もあるが，**§2.** ではペアノの方法にならい **§3.** では計量数としての構成を考えて，W の構成と構造を概観する．**§4.** で幼児からの数概念の発生と展開を考え Whole number system の論証を中等教育で指導するための具体的なプログラムを提示する．

§2. 順序数 (ordinal number) 的構成と構造

ペアノは1，後者，自然数の3つの概念を無定義用語として，次の5つの公理

P_1　1は自然数である．

P_2　任意の自然数 a に対して，a の後者 a^+ がちょうど1つあって，a^+ は自然数である．

P_3　$a^+=b^+$ ならば $a=b$

P_4　$a^+\neq 1$

P_5　1がある性質を有し，その性質を有するある自然数 a の後者 a^+ がまたその性質を有するならば，すべての自然数はその性質を有する．(数学的帰納法の原理)

によって自然数を規定した．

ラッセルは「ペアノの仕事は見掛けに反して最後的なものではない」とし，その理由として，1は100を表わすとしても上の5つの命題はすべて成り立つ．2) 0,2,4,……の偶数列に対しても5つの命題は成り立つ．3) 後者という言葉で半分という意味を表わせば，1,1/2,1/4,1/8,……に対しても5つの命題が成り立つことを例示した．

自然数を定義するのに自然数という語を用いるのも適当ではない．ラッセルの説は **§3.** で考えることにして，われわれは今，Wの順序数的構成を次のように考える．

(1)　順序数的構成

W_1　$0\in W$

W_2　$a\in W$に対し，a の直後の元a^+ がちょうど1つあって，$a^+\in W$

W_3　$a^+=b^+$ ならば $a=b$

W_4　$a^+\neq 0$

W_5　①$0\in M$，②$a\in M$ ならば $a^+\in M$ をみたす W の部分集合 M が存在すれば $M=W$

定義1． 上記の5つの公理を満たす集合を Whole number system という．

(2)　加法と減法

定義２．①$a \in W$ に対して $a+0^+=a^+$

②$a \in W$, $x \in W$に対し $a+x^+=(a+x)^+$

の２つの条件に適するものを加法という．

定理１．Wの元 a, x に対して，それらの和 $a+x$ がただ１つに定まる.(一意存在性)

（証明）上の命題を $\mathrm{F}(x)$ とし $M=\{x|\mathrm{F}(x)\}$ とすると，① $a+0^+=a^+$ とW_2とから $0 \in M$, ② $a+x^+=(a+x)^+$ と W_2とから $x \in M$ なら $x^+ \in M$, ゆえに W_5より $M=W$

加法には

結合法則　$(a+b)+c=a+(b+c)$

交換法則　$a+b=b+a$

簡約法則　$a+c=b+c$ なら $a=b$ (等式の性質)

が成り立つことも加法の定義と W_5 とから示される．

定義３．Wの元 a, b に対して $a=b+x$ となる Wの元 x が存在するとき $a \geq b$ と書き，この x を $a-b$ で表す．a, b に $a-b$ を対応させることを減法という．

減法が一意的に定まることは加法の簡約法則から $b+x_1=b+x_2$ なら $x_1=x_2$ であることより明らかである．

減法は加法の逆算として定義されたわけである．

定理２．Wの元 a, b, c に対して，次の法則が成り立つ．

１）つねに $a \geq a$（反射率）

２）$a \geq b$, $b \geq a$ ならば $a=b$（反対称律）

３）$a \geq b$, $b \geq c$ ならば $a \geq c$（推移律）

４）$a \not\geq b$ ならば $b>a$（三分律）

この4）はWの元 a, b に対して $a>b$, $a=b$, $b>a$ の３つの場合のうちのどれか１つが成り立つということである．

（証明）

2.1）$a \geq b$ であることは $a-b \in W$ すなわち $a=b+x$, $x \in W$ が存在することと同値．ゆえに $a \geq a$ とは $a=a+x$ となるWの元 x が存在することで，これは $a+0^+=a^+, a+0^+=(a+0)^+$ より $a^+=(a+0)^+$, W_3より $a=a+0$ となる $0 \in W$が存在することより明らか．

2.2）$a \geq b$ より $a=b+x$, $b \geq a$ より $b=a+x'$

$\therefore$　$a=(a+x')+x=a+(x'+x)$，$a+0=a=a+(x'+x)$　$\therefore$　$0=x'+x$　$\therefore$　$0 \geq x$, $0 \geq x'$ $(x, x' \in W)$, W_4より $x=0, x'=0$　$\therefore$ $a=b$

2.3）$a \geq b, b \geq c$ より $a=b+x, b=c+x'$, $(x, x' \in W)$　$\therefore$ $a=c+x'+x$, $(x'+x \in W)$　$\therefore$ $a \geq c$

2.4）$a=b, a>b, a<b$ ($b>a$ の意味）のいずれか１つが成り立つことであるが，証明は aを定めて上のいずれかが成り立つbの集合に対し W_5(帰納法）を用いればよい．

(3)　乗法と除法

定義４．① $a \in W$に対し $a \times 0^+=a$

② $a \in W$, $b \in W$に対し $a \times b^+=a \times b+a$

の２つの条件に適するものを乗法という．ただし$a \times 0=0 \times a=0$ とする．Wから０をのぞいた集合を Nとする．

定理３．$a \in N$, $x \in N$ に対して，積 $a \times x$ は一意的に定まる．

（証明）加法の一意存在性と同様に帰納法より（W_5を用いて）証明される．以下$a \times b$を ab と略記することもある．

Wの乗法では

結合法則　$a(bc)=(ab)c$

交換法則　$ab=ba$

分配法則　$(a+b)c=ac+bc$

が成り立ち，Nの乗法ではその他に

簡約法則　$ac=bc$ なら $a=b$ が成り立つ．

定義5．$a\in W$, $b\in W$ に対して $a=b\times x$ が一意に定まるとき，この x を $a\div b$ で表わす．a, bに $a\div b$ を対応させることを除法という．

加法から減法を定めたのと同様に除法は乗法の逆算として定義される．

定理4．$b\neq 0$ のとき $a=b\times x$ となる x が存在すれば，ただ１つに限る．

（証明）$a=b\times x_1$，$a=b\times x_2$ $(a, b, x_1, x_2\in W, b\neq 0)$ とすれば $b\times x_1=b\times x_2$，乗法の簡約法則から $x_1=x_2$（一意的）

存在すれば，ただ１つに定まるけれども，そのような x が $x\in W$とは限らない．すなわちWは（従って Nも）除法に関して閉じていない．

除法に関して閉じた数体系をつくるために有理数を導入しなければならないわけである．

アルキメデス(Archimedes, 287-212 B.C.) **の公理**「$b\in N$, $a\in W$に対し $a<nb$ $(n\in N)$ が存在する」これは実数系において，さらに重要な意味をもつ公理であり，Wにおいては証明のできる命題であるから定理というべきであるが，慣用に従ってアルキメデスの公理と言うことにする．証明は，Nの大小関係を考え，それが整列順序である（Nの部分集合Mは空集合でないならば最小の元をもつ．すなわち $N\supset M\neq\phi$ で $x\in M$ならば $x\supset a$ となるa（$a\in M$）が存在する．Nの大小関係は最小条件に適するともいう）ことから明らかであるが，背理法による１つの証明方法を，新しい数学教育（文部省，1968）から引用する．

「$x<nb$ となる $n(\in N)$ が存在しない」という命題 $\mathrm{F}(x)$ に適する Nの元 x があると，$M=\{x\mid \mathrm{F}(x)\}$ は $N>M\neq\phi$であるから最小元 c をもつ．（最小条件）

$b\geqq 1$ から $1<2b$ となるので $c\neq 1$ となり，$c-1\in N$，$c-1<c$ から $c-1\notin M$，ゆえに，$c-1<nb$ となる $n\in N$ がある．

$\therefore$　$c<nb+1\leq(n+1)b$, $n+1\in N$

これは $c\in M$に反する．この不合理は $M\neq\phi$としたから生じたものである．ゆえに $M=\phi$，すなわちアルキメデスの公理が成り立つ．

この公理からWの元 a, b に対して，$b\neq 0$ のとき $a=b\times q+r$, $0\leq r\leq b$ に適するWの元 q と r が一組だけ存在する（整数に関する除法の原理とも言う）ことが導ける．

Wにおいて，余りのある除法は定義5.では規定できないから，次の定義をする．

定義6．$a\in W$, $b\in W$, $b\neq 0$ に対し $a=b\times q+r$, $0<r<b$ に適する (q, r) $q\in W$, $r\in W$ を求めることを$a\div b$で表す．a, b に $a\div b$ を対応させることを除法という．

(4)　小学校算数科での Whole number system.

①数概念

数を知ったということ，数概念を持ったということは遠山博士も言われているように[4]，数が

㋐１対１対応によって不変であること

㋑分割によって不変であること――分割しても，合併しても総数は変わらない

㋒順序変更によって不変であること――数える順序を変えても同じである

の３条件が確実に把握されたことであると言えよう．現代の算数教育は数体系の構造の理解と，

算数と数学との間の関係の認識にもとづいている．そしてWhole numberに関する演算は小学校の子どもたちが勉強する算数の中心的な部面である[5]．小学校で扱われる数はWhole numberと小数，分数であるが，Whole numberはものの順番を表す（順序数）として用いられると同時にものの個数を表す（集合数）として用いられることを理解させることが大切であり，上記㋐の条件をみたすために，具体的なものについて，その集合の要素を1対1に対応させることによって個数を比べさせるとか，他のもの（例えば半具体的なものとしてオハジキ，数図カード，数字カードなど）で置き換えて数えたり，数と数直線上の点とを対応させるなどの指導が行われる．㋑の条件をみたすために，数の合成・分解の指導，㋒の条件をみたすために，上の方から数えるとともに下の方から数えるとか，右の方から数えるとともに左の方からも数えるとか，前の方から数えるとともに後の方から数えるという操作の指導がなければならない．

数概念そのものではないけれども数詞を正しく唱えられるようにすることも，数概念を発展させるために重要であることはいうまでもない．

②加法と減法

たしざんは増加（ふえるといくつ）と合併（みんなでいくつ）の意味を具体物から始めて，理解させて，加法を導入し，たし算の式の読み方，書き方を教え，抽象数のたし算を指導する．また，ひきざんは求残（のこりはいくつ）と求差（ちがいはいくつ）の意味を具体物から始めて理解させ，減法を導入し，ひき算の式の読み方，書き方を教え，抽象数のひき算を指導する．ひき算はたし算の逆の算法であることに気づかせるのもよいが，最初から，減法は加法の逆の算法であるとして，導入してはならない．心理学の実験結果も示しているように一般に戻り道(retern)——逆の思考はむつかしいものである．また，式の読み方，書き方とも関連して，算数・数学教育におけるメタ言語と対象語を区別して，子どもの発達段階に応じて適切な指導がなされなければならない．

③乗法と除法

かけ算は累加の能率的な方法として導入されるが，子どもに乗法が用いられる場合を知らせるとともに，乗数が1つずつ増すときの積の増し方（乗法の定義4.の②），交換法則などの規則を見つけ出させ，それが用いられるようにしなければならない．また0のかけ算（特に0倍ということの意味づけは，むつかしい）は，ゲームの得点しらべなどの操作を通して子どもに興味と関心をもたせて指導することが大切である．

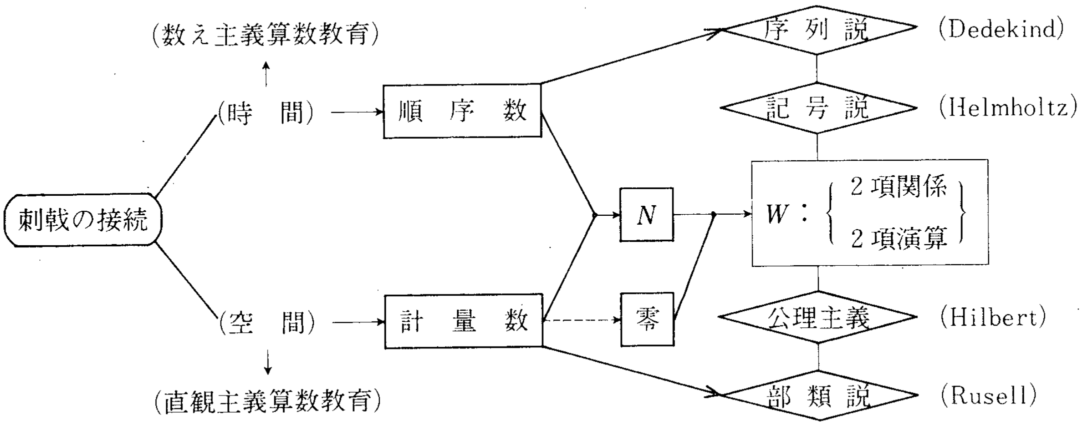
除法は乗法の逆算として定義されることは上述の通りであるが，算数では，具体的な問題の処理を通して，ある数をいくつかずつに分ける（包含除）場合，いくつかに同じように分ける（等分除）場合を子どもの経験を通して考えさせ，このような場合にわり算が用いられることを知らせ，わり算という用語，記号を与えることにしている．すなわち，わり算はかけ算の逆の算法として導入するのではなくて，1つの独立した算法として受けとらせるわけである．その計算の仕方の指導において，かけ算九九を使用することを知らせ，ここでかけ算との逆関係にふれる．

参考文献

1） 林　鶴一：数ノ概念，大倉書店（1929）
2） 河田敬義：自然数論，森北出版（1971）
3） 文部省：高等学校新しい数学教育，東洋館出版社（1968）
4） 遠山　啓：数学入門（上），岩波新書（1978）

5) W. H. Dutton：Arithmetic for Teachers, 2nd edition, 1970.（佐藤俊太郎訳：教師のための算数，明治図書，1974）

Whole Number System は構造的には２種類の２項関係（大小，相等）と２種類の２項演算（加法，乗法）をもつ集合と言えるが，その概念の発生と算数教育との関連，その定義についての諸説のシェマー（schema）は次のように考えられる．



（注）◇内は自然数の定義についての，主として田辺博士の分類名[田辺元：数理哲学研究（1926）]に拠る．