関数　$L: x \to \int_1^x \frac{dt}{t}\ (x > o)$ と，その逆関数について

林　　惪 護

The Development of a Function — $L: x \to \int_1^x \frac{dt}{t}\ (x > o)$ and the Inverse Function

Shingo HAYASHI

Abstract

We needed the calculation of enomous numbers while we were studying the movement of the planet. At the same time we found it very necessary to calculate those numbers very easily. Napier (1550–1617) invented the way of calculation by means of logarithm which he showed in his thesis of Mirifici logarithmorum canonis descriotio published in 1614.

At the 18th century after his invention, Euler (1707–1783) defined exponential function. Moreover, he defined logarithmic function as the inverse function of exponential function. He is known to have unified logarithm theoretically.

This thesis is concerned with the other way. It proves theoretically the relationship of correspondence between the quantity varying with geometrical series and the one varying with arithmetical series in the phenomenal world. It defines logarithmic function with fluxional analysis as a mathematical model of elementary transcendental functions. It further defines exponential function as inverse function and shows the characteristics of these functions.

> Hilbert (1862–1943) said:
> Mathematics is not to pursue the truth in correspondence with the phenomenal world. It only draws the conclusion formally on the supposition that any contradiction should never rise. It never has any purpose except that it makes "abstract theory."

Nevertheless, if mathematics is confined in its world, it can not make its progress but brush its technic like the native mathematics of Japan. It is understandable that mere suppositions take place of the axioms of mathematics. But the suppositions seem to be more powerful when we can raise them on the fertile ground of natural science in the phenomenal world. Therefore this thesis explains in the section of the phenomenal world, in the section of the logarithmic function and in the section of the exponential function.

現　象　世　界

(1)　刺激と感覚

生物の感覚器官に与える刺激の量をx，それによって生じる感覚の強さをyとする．心理学における Weber - Fechner の法則[1)]によると，刺激閾α．と刺激頂αの範囲内では，刺激量の差の弁別の限界値（弁別閾）Δxを標準刺激xで割った値（相対弁別閾）$\dfrac{\Delta x}{x}$は感覚ごとにまた属性ごとに定まる定数であり，感覚の変化Δyは$\dfrac{\Delta x}{x}$に比例するといわれる．

刺激が等比級数的に変化すると，それに対応する感覚の強さは等差級数的に変化し

関数　$f : x \to y$　は　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{c}{x}$　（cは正の定数）

をみたすものと考えられる．

(2)　物体の冷却

Newton の冷却法則によると，物体の温度の下がる速度は，物体と周囲の媒質との間の温度差に比例する．

温度差をu，時間をtとすると，時間が等差級数的に変化するとき，物体の温度は等比級数的に減少して媒質の温度に近づく．そこでは，

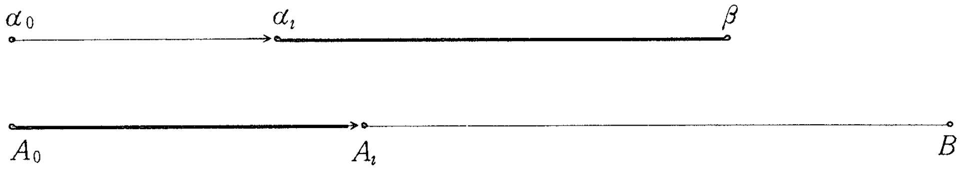
関数　$g : u \to t$　として　$\dfrac{dt}{du} = -\dfrac{k}{u}$　（kは正の定数）をみたすものが考えられる．

(3)　減衰振動

単振子は振角が小さいときは，簡単な減衰振動をする．実験の結果は，任意の回帰点から直後の回帰点までの時間は一定（等時性）で，それをkとすると，振り始めてから，つぎつぎの回帰点に至るまでの時間tが$0,\ k,\ 2k,\ \cdots\cdots$と等差級数的に変化するとき，それに対応する振角$\theta$の変化は$\alpha,\ \alpha c,\ \alpha c^2,\ \cdots\cdots (0 < c < 1)$と等比級数的である．

関数　$h : \theta \to t$　として　$\dfrac{dt}{d\theta} = \dfrac{c}{\theta}\ (0 < c < 1)$をみたすものが考えられる．

(4)　Napier[2)] 的運動対応



単位の長さをもつ長さaの線分　$\alpha_0\beta$　上を，α_0からβに向って初速度cで出発して，任意の位置α_tにおける速度が距離$\alpha_t\beta$に等しいような運動をする点をαとし，

また同時に半直線A_0B上をA_0からBに向って初速度cで出発し，等速度運動をする点Aの同時刻における位置をA_tとする．

点αの位置は等比級数的に変化するのに対し，それに対応する点Aの位置は等差級数的に変化する．

いま　$\alpha_t\beta = x$　　$A_0A_t = y$　とおくと　$\alpha_0\alpha_t = a - x$

α_tにおける速度は　　$v_t = \dfrac{d}{dt}(a - x) = -\dfrac{dx}{dt}$

仮定より　$v_t = x$

$\therefore\ \dfrac{dx}{dt} = -x$　　また一方　$\dfrac{dy}{dt} = c$　　これより　$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{c}{x}$

(5) 完全順列の確率

1からnまでの数字を書いたn枚のカードを，1からnまでの番号をつけたn個の箱へ，それぞれ1枚ずつ任意に入れるとき，それぞれの箱に，すべて箱の番号とは異なる番号のカードが入る（Complete Permutation[3]）確率は

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}=\sum_{K=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{K!}\doteqdot 1/1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}$$
$$=1\Big/\sum_{K=0}^{n}\frac{1}{K!}$$

これらの現象世界における数理をふまえて，対数関数・指数関数を考える．

対 数 関 数

〔定義 1.1〕　関数　Lを次のように定義する．

$$L:x\to y,\quad y=\begin{cases} x=1\text{ のとき } y=0 \\ 0<x<1,\ 1<x\text{ のとき }\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

この定義は次の定義と同値である．

$$L:x\to y,\quad y=\int_1^x\frac{dt}{t}\ (x>0)$$

〔定理 1.1〕　任意の正数　p, q に対し

$$L(pq)=L(p)+L(q)$$

〔証明〕
$$\frac{d}{dx}L(px)=\frac{d}{du}L(u)\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot p=\frac{p}{px}=\frac{1}{x},\ (x>0)$$
$$\therefore\quad L(px)=\int\frac{1}{x}dx+c_1$$

また定義1.1より　$L(x)=\int_1^x\frac{dt}{t}$　　　$L(1)=0$ だから

$L(px)=L(x)+c_2$　　$x=1$ とおくと　$L(p)=L(1)+c_2=c_2$

$\therefore$　$L(px)=L(x)+L(p)$　　$x=q$　とおくと

$L(pq)=L(p)+L(q)$

〔定理 1.2〕

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}L(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+0}L(x)=-\infty$

(2)　$x>1$ のとき，nを正整数として

$L(x^n)=nL(x),\ L(x)>0$

また

$$L(x)+L\left(\frac{1}{x}\right)=L\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=L(1)=0\text{ より }L\left(\frac{1}{x}\right)<0$$

(3)　正の有理数を　$p=\dfrac{n}{m}$（n, m は正の整数）とするとき

$$mL(x^p)=L(x^{pm})=L(x^n)=nL(x) \quad \text{より}$$

$$L(x^p)=\frac{n}{m}L(x)=pL(x)$$

(4)　任意の実数 r に対し，$x>1$ で；$r>0$ なら $p<r$ をみたすすべての正の有理数 p をとり，x^p の上限（least upper bound）を x^r，$r<0$ なら $x^r=1/x^{|r|}$，$r=0$ なら $x^0=1$ と定義すれば L の連続性と単調性によって

$$L(x^r)=rL(x)$$

〔定義 1.2〕　定義 1.1 の関数 L を x の対数関数，y を x の対数といい

$y=L(x)=\log x$（$x>0$）と書く．

指　数　関　数

対数関係の項で定義した関数 L は，ユークリッド空間 R^1（実数直線）の上で狭義の単調増加かつ微分可能（したがって連続）だから逆関数が存在する．

〔定義 2.1〕

先の項で述べた対数関数 L の逆関数を E とする．

$$E:\quad \int_1^x \frac{dt}{t}\,(x>0)\to x\left(-\infty<\int_1^x\frac{dt}{t}<\infty\right),\quad \text{すなわち}\quad y=E(x)\Longleftrightarrow x=L(y)$$

〔定理 2.1〕　任意の実数 α，β に対し

$$E(\alpha+\beta)=E(\alpha)E(\beta)$$

〔証明〕

$E(\alpha)=a$，$E(\beta)=b$，$E(\alpha+\beta)=c$　とおくと

$\alpha=L(a)$，$\beta=L(b)$，$\alpha+\beta=L(c)$

$\alpha+\beta=L(a)+L(b)=L(c)$

定理 1.2 より　$L(a)+L(b)=L(ab)$

$\therefore\ L(ab)=L(c)$

L の単調性と連続性から　$ab=c$

$\therefore\ E(\alpha)E(\beta)=E(\alpha+\beta)$

〔定理 2.2〕

$$\frac{d}{dx}E(x)=E(x)$$

〔証明〕　$y=E(x)$　とおくと　$x=\displaystyle\int_1^y\frac{dt}{t}$

$$\therefore\ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{y},\quad \frac{d}{dx}E(x)=\frac{dy}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy}=y=E(x)$$

〔定理 2.3〕

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}E(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}E(x)=0$

(2)　$E(x)E(-x)=E(x-x)=E(0)=1$

〔定義2.2〕　　級数 $\sum_{K=0}^{n}\frac{1}{K!}$ を a_n とすると，数列 $\{a_n\}$ は単調増加，かつ

$a_n=\sum_{K=0}^{n}\frac{1}{K!}<1+\sum_{K=0}^{n-1}\frac{1}{2^K}<3$ だから収束して極限値をもつ．それを e と定義する．

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

〔定義2.3〕　　任意の実数 x に対して　$S_n=\sum_{K=0}^{n}\frac{x^K}{K!}$　とすると

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{S_{n+1}}{S_n}\right|<1$　だから　$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$　は絶対収束級数である．ここで

関数 E_0 を次のように定義する．

$$E_0:\quad x\to y,\quad y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

〔定理2.4〕　　任意の実数 $\alpha,\ \beta$ に対し

$$E_0(\alpha)E_0(\beta)=E_0(\alpha+\beta)$$

〔証明〕

$$E_0(\alpha)E_0(\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta^m}{m!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{K=0}^{n}\frac{\alpha^K\beta^{n-K}}{K!(n-K)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{K=0}^{n}{}_nC_K\alpha^K\beta^{n-K}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}=E_0(\alpha+\beta)$$

〔定理2.5〕

$$\frac{d}{dx}E_0(x)=E_0(x)$$

〔証明〕

$$\frac{d}{dx}E_0(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}=E_0(x)$$

〔定理2.6〕　　定義2.2，定義2.3，および定理2.4から次の定理が成りたつ．

(1)　$\lim_{x\to+\infty}E_0(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}E_0(x)=0$

(2)　$E_0(x)E_0(-x)=E_0(x-x)=E_0(0)=1,\ E_0(1)=e$

〔定理2.7〕

(1)　定理2.4より　$E_0(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=E_0(x_1)E_0(x_2)\cdots\cdots E_0(x_n)$

$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=1$　とおくと

$$E_0(n)=\{E_0(1)\}^n=e^n\qquad (n\text{ は正の整数})$$

(2)　正の有理数　$p=\frac{n}{m}$（$n,\ m$ は正の整数）に対し

$\{E_0(p)\}^m=E_0(mp)=E_0(n)=e^n$ だから

$$E_0(p)=e^{\frac{n}{m}}=e^p\quad (p\text{ は正の有理数})$$

また　$E_0(p)E_0(-p)=E_0(p-p)=E_0(0)=1$　より

$$E_0(-p)=\frac{1}{E_0(p)}=\frac{1}{e^p}=e^{-p}$$

(3)　$x>1$ で r が実数のとき，$r>0$ なら $p>r$ をみたすすべての正の有理数 p に対して，x^p の上限（least upper bound）を x^r, $r<0$ なら $x^r=1/x^{|r|}$, $r=0$ なら $x^0=1$ と定義すれば，E_0 の連続性と単調性によって，任意の実数 r について

$$E_0(r)=e^r\quad(-\infty<r<\infty)$$

定理2.1 ↔ 定理2.4，定理2.2 ↔ 定理2.5，定理2.6より

$E(x)=E_0(x)$　となり

$E(x)=e^x$　がいえる．

〔定義2.4〕　定義2.1の関数 E を x の指数関数といい

$y=E(x)=e^x\ (-\infty<x<\infty)$ と書く．

定理2.7 (3) で実数 r に対して x^r を定義したのと同様に，1でない正の実数 $a\ (0<a<1,\ 1<a)$ について，任意の実数 x に対し 関数 a^x（一般の指数関数）を定義し，a^x の逆関数を　$\log_a x$　と書き，a を底ということにすれば

e^x の逆関数　$\log x$　（自然対数）は　$\log_e x$　と書かれて，底は e である．

また，現象世界の (4) Napier 的運動対応で，A_t の値 y を α_t の値 x の対数（Napierの対数）ということにすると，それは $\frac{1}{e}$ を底とした対数にあたる．

したがって，自然対数とNapier の対数とは同一のものではない．

参　考　文　献

1) 印東太郎編 ： 心理学研究法 17 モデル構成，東京大学出版会 （1973）.

2) 伊藤俊太郎他： 数学講座 18 数学史，筑摩書房 （1975）.

3) Kemeny, J. G. et al. : Introduction to Finite Mathematics. Prentice-Hall Inc.(1957).