フォール・ナンバーシステムの
教育的考察（第Ⅱ報）

林　　真　護

The Educational Concideration of the Whole Number System (II)

Shingo HAYASHI

計量数 (cardinal number) 的構成と構造

ラッセルは Introduction to mathematical philosophy (1920) において，「無限は自己矛盾でもないし，また論理的には証明されないから，我々は世界中の物の数が有限であるかまたは無限であるかに関して，先天的には何も知ることができないと断定しなくてはならない．したがって "可能な世界のあるものは有限であるし，あるものは無限である．我々の現実の世界がそのどちらであるか知ることはできない" といったライプニッツの言葉をもって我々の結論としなければならない．無限の公理もまたある世界では真であり，またある他の世界では真でない．この現実の世界がどちらであるかは何の断定も下すことはできない」と述べている[1]．またヒルベルト (Hilbert) の公理主義数学の立場に拠れば，数学は現象世界との対応におけるその真理性を追求するものではない．数学における公理は，ただ単に「矛盾を生じない」という条件のみを要求された仮定であり，その仮定から形式的に結論を導いていく「抽象理論」の建設こそが数学の責務であり，それ以外には何らの目的も持たないものである．したがって本論文でも無限集合は存在すると仮定する．

(1) 計　量　数

公理 1　(無限公理)

$$\left.\begin{array}{ll} ① & \phi \in W : \forall x \neg (x \in \phi) \\ ② & X \in W \Rightarrow X \cup \{X\} \in W \end{array}\right\}$$ を満たす集合 W が少なくとも 1 つ存在する．

集合 N と W との間に 1 対 1 対応がつけられるとき，すなわち N と W とが全単射同型であるとき，N と W とは対等 (同等，同値) であるといい，$N \approx W$ と書く．N から W への写像を φ とすれば

$\exists \varphi [\varphi(N) = W \wedge x \neq x' \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(x')] \Leftrightarrow N \approx W$

定理 1　関係 $\approx$ は

$$\left.\begin{array}{ll} ①\ N \approx N & \text{(反射律)} \\ ②\ N \approx W \Rightarrow W \approx N & \text{(対称律)} \\ ③\ N \approx W \wedge W \approx Z \Rightarrow N \approx Z & \text{(推移律)} \end{array}\right\}\text{同値律を満たす.}$$

N を N に写す恒等写像は全単射であるから①が成り立ち,

$f: N \to W$ が全単射なら, $f^{-1}: W \to N$ も全単射だから②が成り立つ.

$f: N \to W$, $g: W \to Z$ がともに全単射なら $g \circ f: N \to Z$ も全単射になるから③も成り立つ.

集合 N と対等な集合全体に共通なものとして把握される「類 (collection)」概念を N の計量数 (基数, 濃度) といい $|N|$ で表す. すなわち集合 N の濃度とは, N と対等なすべての集合の類である.

公理 2

集合 N には, その濃度 $|N|$ が付随して, 集合が対等ということと, その濃度が等しいということとは同値である.

0 および 1 については, $|\phi|=0$, $|\{\phi\}|=1$ と定義する.

(2) 2 項関係・2 項演算

x, y が濃度で $x=|A|$, $y=|B|$, $A \subset B$ のとき, $x \leqq y$, すなわち
(x が濃度であることを $P(x)$ と書けば)

$$P(x) \wedge P(y) \Rightarrow [x \leq y \Leftrightarrow \exists A \exists B\{|A|=x \wedge |B|=y \wedge A \subset B\}]$$

$x \leq y$ で $x \neq y$ のとき $x<y$, すなわち

$$P(x) \wedge P(y) \Rightarrow [x<y \Leftrightarrow [x \leq y \wedge \neg\{(x=y)\}]]$$ と定義する.

定理 2　x, y, z が濃度であれば, 関係 $\leq$ について

① $x \leq x$

② $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x=y$

③ $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

④　$x<y$, $x=y$, $y<x$　　　のいずれか1つただ1つが成り立つ.

(証明)

①, ②, ③の成り立つことは $\leq$ の定義から自明.

Wの任意の空でない部分集合 S が常に最小元をもつときWを整列集合というと，集合論における整列可能定理「すべての集合は，その要素に適当に順番をつけてならべていくことにより，整列集合とすることができる」から，④については

$x=|A|$, $y=|B|$ の A, B を整列集合としてよい. 集合 A, B のそれぞれの順序数を α, β とすると, $\alpha\leq\beta$, $\beta\leq\alpha$ のどちらかが成り立つ.

いま $\alpha\leq\beta$ とすると A は B 自身または B の切片と相似で, A は B または B のある部分集合と1対1対応がつく. $\therefore$ 　$x\leq y$

同様に $\beta\leq\alpha$ とすると $y\leq x$ ゆえにいずれにしても $x\leq y$ または $y\leq x$ のどちらかが成り立つから, $x<y$, $x=y$, $y<x$ のいずれか1つただ1つが成り立つ.

定理3　$A\approx A'$, $B\approx B'$, $A\cap B=\phi$, $A'\cap B'=\phi$ ならば $A\cup B\approx A'\cup B'$ が証明されるから

$|A|=|A'|\wedge|B|=|B'|\wedge A\cap B=A'\cap B'=\phi\Rightarrow|A\cup B|=|A'\cup B'|$

したがって

$$\forall x\forall y[P(x)\wedge P(y)\Rightarrow[P(x+y)\wedge\forall A\forall B\{x=|A|\wedge y=|B|\wedge A\cap B=\phi\Rightarrow x+y=|A\cup B|\}]]$$

として，濃度の加法を定義することができる. すなわち

$A\cap B=\phi$ なる集合 A, B に対し $|A|=x, |B|=y$ とすると $A\cup B$ の濃度 $|A\cup B|$ を x と y との和と定義し, $x+y$ と書く.

定理4　x, y, z が濃度であれば和の定義から

①　$x+y=y+x$

②　$(x+y)+z=x+(y+z)$

③　$x+0=x$

が成り立つことは容易に分かる.

どのような真部分集合とも対等でない集合を有限集合と定義する. このことは双整列順序(順序関係$\leq$ とその双対 $\geq$) が存在する集合を有限集合と定義することと同値である.

集合 A が有限集合であることを $F(A)$ と書くと

公理3　$x\in W\Leftrightarrow\exists A\{x=|A|\wedge F(A)\}$

W の要素を自然整数と定義する. (これを自然数といってもよい). 定義から0, 1が自然整数

であることは自明である．以下自然整数全体の集合を W で表す．

W から $W\times W$ への写像 $f(n, m)$ が

$$\begin{cases} f(0, m)=0 \\ f(n+1, m)=f(n, m)+m \end{cases}$$

を満たすとき，f を W における乗法と定義し，その像を $n\times m$ または nm と書く．

加法の逆写像を減法，乗法の逆写像を除法と定義すれば，自然整数 W の代数的構造は，2 項演算として四則算法の交換則，結合則，分配則，加法の簡約則，(0 以外の元の) 乗法の簡約則が成り立ち，$(W\ ;+, \leq)$, $(W\ ;\times, \leq)$ は加法，乗法に関して単位元をもつ単位的な半群 (単位的半群　unitary semi-group) であり，加法，乗法は自由にできるが，逆元をもたないから群ではなく，減法，除法は自由にはできない．

また $(W\ ;+, \times, \leq)$ は順序半環である．

かくして，W の計量数的構成・公理 1，2，3 と 2 項関係，2 項演算の定義とから W のもつすべての性質は証明されて，その代数的構造が解明される．

定理 5　M を W の部分集合とし

① $0\in M$

② $n\in M\Rightarrow n+1\in M$ のとき $M=W$　　(完全帰納法)

(証明)

$m\in W$ として $m\in M$ を示せばよい．

$m=|A|$ なる有限集合 A の双整列順序を $\leq$ とする．

A の任意の要素 x に対し

$A(x)=\{\alpha\,|\,\alpha\leq x\wedge\alpha\in A\}$ とおく．A の最小元を a とすると

$A(a)=\{a\}$ かつ $\{a\}\approx\{\phi\}$　　$\therefore\ |A(a)|=1=0+1$

①により $0\in M$ だから　②により $|A(a)|\in M$

$|A(x)|\in M$ なる x のうち最大のものを y, A の最大元を b とする．y が A の最大元でなく $y<b$ であるとすると，$y<\alpha\wedge\alpha\in A$ なる α の最小のものを z とすれば，

$A(\mathrm{z})=A(y)\cup\{\mathrm{z}\}$　　$\therefore\ |A(\mathrm{z})|=|A(y)|+|\{\mathrm{z}\}|=|A(y)|+1$

$|A(y)|\in M$ だから②により $|A(\mathrm{z})|\in M$ となり不合理，ゆえに y は A の最大元 b でなければならない．

$\therefore\ A(b)=A$　　$\therefore\ |A(b)|=|A|$，$m=|A|$ だから　$m=|A|=|A(b)|\in M$

数学における推論の際に，しばしば用いられる有効な方法としての数学的帰納法の原理は，自然数または自然整数 W の順序数的構成においてはペアノの公理 P_5 または自然整数の公理 W_5 としたが本章の W の計量数的構成においては定理5 (完全帰納法) として証明された．

自然数系の無矛盾性

人間にとって最も基本的で素直であり，かつ数学的な精神の基盤に深く結びついている自然数の概念を考察し，自然数論を構成していく方法は竹内外史氏も述べているように教育的 (小学校算数風，大学講義風)，現代数学的；心理的，哲学的，記号的，形式的，直観的などいろいろな立場が考えられる．しかしその体系の無矛盾性の証明になると，現在のところ数学基礎論の立場に拠らなければならないと思われる．

数学基礎論では，自然数論の公理群として

① $\forall x(x=x)$

② $\forall x \forall y(x=y \rightarrow y=x)$

③ $\forall x \forall y \forall z(x=y \wedge y=z \rightarrow x=z)$

④ $\forall x \forall y(x<y \vee x=y \vee y<x)$

⑤ $\forall x \forall y \ \neg(x<y \wedge x=y)$

⑥ $\forall x \forall y \ \neg(x<y \wedge y<x)$

⑦ $\forall x \forall y \forall z(x<y \wedge y<z \rightarrow x<z)$

⑧ $\forall x \forall y \forall z(x=y \wedge y<z \rightarrow x<z)$

⑨ $\forall x \forall y \forall z(x=y \wedge z<y \rightarrow z<x)$

⑩ $\forall x(1<x \vee 1=x)$

⑪ $\exists x \exists y(x=1 \vee y'=x)$

⑫ $\forall x(x<x')$

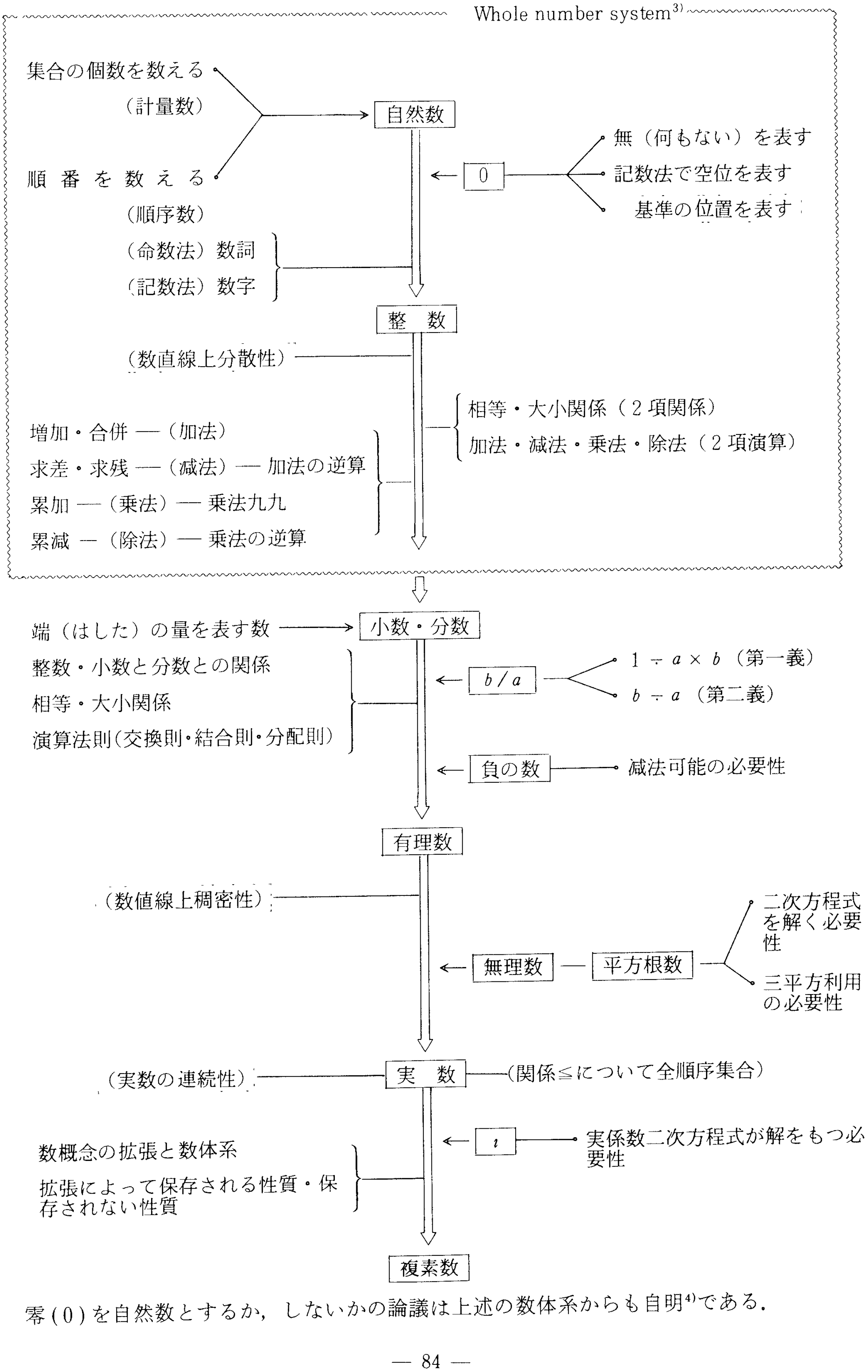
⑬ $\forall x \forall y(x<y \rightarrow x'=y \vee x'<y)$

⑭ $\forall x \forall y(x=y \rightarrow x'=y')$

をとり，この①～⑭の公理群から論理的に証明できるものだけを自然数論として取り扱うことにする[2)]．

ゲェンツェンは G. Gentzen : Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahalentheorie, Math. Ann.112 (1936) において，この立場から自然数論の体系の無矛盾性を証明している．しかしゲーゲル (Gödel) はこのような形式化された自然数論においては証明できない自然数論の命題が存在することを指摘し，ω 無矛盾自然数論の概念を導入している．

フォール・ナンバーの発生的構成と拡大



零（0）を自然数とするか，しないかの論議は上述の数体系からも自明[4]である.

参 考 文 献

1） Rusell. B：Introduction to mathematical philosophy, (1920). 平野智治訳：数理哲学序説　p. 216

2）河田敬義：自然数論 (1971) p.125

3）林真護：名古屋女子大学紀要，26，173-178 (1980)

4）西村敏男・難波完爾：公理論的集合論 (1985) p.199