名古屋女子大学　紀要　**38**（人・社）89～97　1992

推論の検証についての数学教育的考察

林　　真護

The Checking of Arguments Viewed from Mathematical, Educational Points

Shingo HAYASHI

Abstract

All dogs have two legs.
All two legged animals are carnivorous.

Therefore,　all dogs are carnivorous.

Here the argument is valid and the conclusion is true, but both premises are false! (Introduction to Finite Mathematics, P. 30)

The diagonal lines of a rhombus meet at right angles.
The diagonal lines of this quadrangle don't meet at right angles.

Therefore this quadrangle is not rhombus.

Here the argument is valid and premises and conclusion are true.

Why are those arguments valid ?

We shall consider the checking of arguments and that mathematics educational guidance.

Therefore we know that a true conclusion is neither necessary nor suficient for the validity of the argument.

論理的推論

記号化された命題の体系すなわち形式的体系 F の与えられた式から F の他の式を導く次の三つの規則（**推論規則**）

(1)　分離規則

Ａと$A\rightarrow B$からＢをうる．

(2)　∀－規則

xがＢにおいて自由でないならば

$B\rightarrow A$から$B\rightarrow \forall x A$をうる．

(3)　ヨー規則

xがBにおいて自由でないならば

A→Bから∃x A→Bをうる．

について，(1)におけるAとA→B，(2)におけるB→A，(3)におけるA→Bをそれぞれ(1)，(2)，(3)の**前提**，(1)におけるB，(2)におけるB→∀x A，(3)における∃x A→Bをそれぞれ(1)，(2)，(3)の**結論**とよぶ．[d1]

前提の合接が結論を導くとき（すなわち，いくつかの前提がみな真であるような，すべての論理的可能性において，結論が真であるとき，すなわち，前提から結論が含意 implication の関係にあるとき）**推論は有効**であるとする．有効な推論は正しいといい，有効でない推論は謬論というが，記号論理学でも知られているように，正しい推論の形は十九個に尽きることを，赤攝也氏らは数学序説[d2]でも示している．

以下，本論文では研究するときの記号として，２値論理における命題をp, q, r, ……………で表し，

離接　(…または…)　を　… ∨ …

合接　(…かつ……)　を　… ∧ …　や　…，…

否定　(…でない　)　を　～…

全称　(すべてのxについて）を　∀x……

存在　(…であるようなxが存在する）を　∃x……

条件文命題（pならばq）を　$p \to q$　[特に含意（pならばq）の関係は　$p \Rightarrow q$]

双条件文命題　を　$p \leftrightarrow q$　[双含意の関係（同値関係）は　$p \Leftrightarrow q$]

と書き，よく現われるいくつかの推論を推論図式で示し，その推論の有効性の検証を，命題の真理表（真をt，偽をf）を用いて行う．

有効な推論

（例１）

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

真理表Ⅰの第一行により，推論は有効

肯定式（$p \to q$, p）$\Rightarrow q$は推論の分離規則そのものである．

「ひし形の対角線は直角に交わる．これはひし形である．それゆえに対角線は直角に交わる」という推論は正しい．

（例２）

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

真理表Ⅰの第四行により，推論は有効

否定式（$p \to q$, $\sim q$）$\Rightarrow \sim p$は正しい．

「ひし形の対角線は直角に交わる．この（四角形）対角線は直角に交わらない．それゆえにこれはひし形でない」という推論は正しい．

命題　$p \to q$　に対してその対偶命題　$\sim q \to \sim p$　をつくるという推論は有効である．すなわち　($p \to q$) $\Rightarrow$ ($\sim q \to \sim p$)　とも書けるわけであるが，推論において前提や結論の命題の真，偽は推論の有効性のための必要条件でも，十分条件でもない．

例えば

「長方形の対角線は直角に交わる．この（四角形）対角線は直角に交わらない．それゆえにこれは長方形ではない」という推論は正しい．しかし，前提の命題は偽，結論の命題も偽である．

（例３）

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

真理表Ⅰの第一行により，推論は有効

肯定式（$p \rightarrow q$, p）$\Rightarrow q$ は正しい．

同様に

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

真理表Ⅰの第一行により有効

肯定式（$p \leftrightarrow q$, q）$\Rightarrow p$ は正しい．

（例４）

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

真理表Ⅱの第一行（五，七，八行）により有効

仮言的三段論法（$p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$）$\Rightarrow$（$p \rightarrow r$）は正しい．

例えば

「すべての犬は２本の足をもっている．すべての２本足の動物は肉食である．ゆえにすべての犬は肉食である.」という推論は，前提の命題の合接は偽（２つの命題もともに偽）であり，結論の命題は真である．推論は有効（正しい）[注3] である．

また

「知能指数100以上のすべての学生の数学の成績は90点以上である．数学の成績が90点以上のすべての学生はＴ大学に合格する．ゆえに知能指数100以上のすべての学生はＴ大学に合格する.」

という推論は，前提の命題の合接は偽，結論の命題も偽であるが，推論は有効（正しい）である．

偽である前提は，有効な推論によって真である結論を導くこともあれば，偽の結論を導くこともある．前提の命題（の合接）が真であれば，有効な推論（正しい推論）によって必ず真なる結論が導かれることは言うまでもない．

（例５）

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim r \rightarrow \sim q \\ \hline \therefore \sim r \rightarrow \sim p \end{array}$$

真理表Ⅱの第一行（五，七，八行）により有効

仮言的三段論法（$p \rightarrow q$, $\sim r \rightarrow \sim q$）$\Rightarrow$（$\sim r \rightarrow \sim p$）は正しい．

（例６）

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

真理表Ⅰの第三行により有効

選言的三段論法（$p \vee q$, $\sim p$）$\Rightarrow q$ は正しい．

（例７）	$\forall x\, p(x) \to q(x)$	真理表Ⅰの第一行により，推論は有効．
	$p(a)$	推論の∀－規則そのものである．
	$\therefore q(a)$	定言的三段論法 $[\forall x\, p(x) \to q(x),\ p(a)] \Rightarrow q(a)$ は正しい．

有効でない推論（謬論）

（例１′）	$p \to q$	真理表Ⅰにおいて，前提の命題の合接が真であるのは第一行と第三行であるが，第三行で結論の命題は偽であるから，推論は有効でない．
	q	
	$\therefore p$	$(p \to q,\ q) \Rightarrow p$ は成り立たない．すなわち $(p \to q,\ q) \not\Rightarrow p$

（１′）――①　謬論によって，真なる前提から偽なる結論がでる例

「ひし形の対角線は直角に交わる．この（四角形の）対角線は直角に交わる．それゆえに，これはひし形である」という推論は正しくない（謬論）．

命題　$p \to q$　に対して，その逆命題　$q \to p$　をつくるという推論は正しくない．（逆は必ずしも真ならず）すなわち $(p \to q) \not\Rightarrow (q \to p)$ とも書ける．

この場合，逆命題　$q \to p$（四角形の対角線が直角に交わるならば，それはひし形である」が偽であることの証明は１つの反例（例えば，たこ形の対角線は直角に交わるけれども，これは，ひし形ではない）で示される．しかしこれは推論が正しくないことの証明ではない．結論が偽（正しくない）だから，推論が正しくない（謬論）というのではない．

（１′）――②　謬論によって真なる前提から真なる結論がでる例

「平行四辺形の対角線は，互いに他を二等分する．この四角形の対角線は互いに他を二等分する．それゆえに，これは平行四辺形である」という推論は正しくない（謬論）．

前提も真，結論も真であるから，推論が正しい（有効）とは，いえない．

（例２′）	$p \to q$	真理表Ⅰにおいて，前提の合接が真であるのは第三行と第四行である．しかし第三行で結論は偽であるから，推論は有効でない．
	$\sim p$	
	$\therefore \sim q$	$p \to q,\ \sim p \Rightarrow \sim q$　は成り立たない．$(p \to q,\ \sim p) \not\Rightarrow \sim q$

（２′）――①　謬論によって，真なる前提から偽なる結論がでる例

「ひし形の対角線は直角に交わる．これは，ひし形でない．それゆえにこれの対角線は直角に交わらない」という推論は正しくない（謬論）．

命題　$p \to q$　に対して，その裏命題　$\sim p \to \sim q$　をつくるという推論は正しくない．すなわち $(p \to q) \not\Rightarrow (\sim p \to \sim q)$ とも書ける．この場合の裏命題　$\sim p \to \sim q$（ひし形でない（四角形）の対角線は直角に交わらない）が偽であることの証明は（１′）――①と同様であるが，結論が偽だから，推論が正しくないというのではない．

（２′）――②　謬論によって真なる前提から真なる結論がでる例

「平行四辺形の対角線は互いに他を二等分する。これは平行四辺形でないから，対角線が互

いに他を二等分することはない」という推論は正しくない（謬論）．

前提も真，結論も真であっても，推論が有効であるとはいえない．

数学における定理の証明というのは，前提の命題の合接を真であるとして，結論の命題が恒等真であることを示すこと，すなわち $p \Rightarrow q$（$p \rightarrow q$ がトートロジー）を示す一つの推論である．

（例 3′）

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \sim p \rightarrow q \\ \hline \therefore \sim q \end{array}$$

真理表Ⅰにおいて，前提の合接が真であるのは第一行のみでこのとき結論は偽であるから，推論は有効でない．

$(p \wedge q,\ \sim p \rightarrow q) \Rightarrow \sim q$ は成り立たない．すなわち

$(p \wedge q,\ \sim p \rightarrow q) \not\Rightarrow \sim q$

（例 4′）

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \rightarrow \sim r \\ \hline \therefore r \rightarrow p \end{array}$$

真理表Ⅲで，前提の合接が真であるのは，第五行のみで，このとき結論は偽であるから，推論は有効でない．

$(p \rightarrow q,\ \sim q \rightarrow \sim r) \Rightarrow (r \rightarrow p)$ は成り立たない．すなわち

$(p \rightarrow q,\ \sim q \rightarrow \sim r) \not\Rightarrow (r \rightarrow p)$

（例 5′）

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \vee r \\ \sim r \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

真理表Ⅳで，前提の合接が真であるのは，第二行のみで，このとき結論は偽であるから，推論は有効でない．

$(p \leftrightarrow q,\ q \vee r,\ \sim r) \Rightarrow \sim p$ は成り立たない．すなわち

$(p \leftrightarrow q,\ q \vee r,\ \sim r) \not\Rightarrow \sim p$

（真理表Ⅰ）

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$p \vee q$
t	t	t	f	f	t	t	t
t	f	f	f	f	f	f	t
f	t	t	t	f	f	f	t
f	f	t	t	t	t	f	f

（真理表Ⅱ）

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$
t	t	t	t	t	t	f	f	f
t	t	f	t	f	f	f	f	t
t	f	t	f	t	t	f	t	f
t	f	f	f	t	f	f	t	t
f	t	t	t	t	t	t	f	f
f	t	f	t	f	t	t	f	t
t	f	t	t	t	t	t	t	f
f	f	f	t	t	t	t	t	t

（真理表Ⅲ）

p	q	r	$p\rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$\sim q\rightarrow\sim r$	$r\rightarrow p$
t	t	t	t	f	f	f	t	t
t	t	f	t	f	f	t	t	t
t	f	t	f	f	t	f	f	t
t	f	f	f	f	t	t	t	t
f	t	t	t	t	f	f	t	f
f	t	f	t	t	f	t	t	t
f	f	t	t	t	t	f	f	f
f	f	f	t	t	t	t	t	t

（真理表Ⅳ）

p	q	r	$p\leftrightarrow q$	$q\vee r$	$\sim r$	$\sim p$
t	t	t	t	t	f	f
t	t	f	t	t	t	f
t	f	t	f	t	f	f
t	f	f	f	f	t	f
f	t	t	f	t	f	t
f	t	f	f	t	t	t
f	f	t	f	t	f	t
f	f	f	f	f	t	t

数学教育的考察

G・ポリアは論理的推論によって，数学的知識を獲得するけれども，私どもは蓋然的推論によって，その推測は支持されると述べ，論理的推論の他に蓋然的推論として，帰納的証拠（物理学者），情況的証拠（裁判官），記録的証拠（歴史学者），統計的証拠（経済学者），確率的証拠（気象官）の例をあげている．[注14]

算数教育において，数量や図形だけではなくて，日常の事象についても，その性質や法則を発見したり，確かめたりするために，見通しをもち筋道を立てて考える態度を育成することを一つの目標としているが，その筋道を立てて考える思考形式として，推論を演繹的推論，帰納的推論，類比的推論，統計的推論などに分類することも考えられる．

ポリアの言う論理的推論にしても，蓋然的推論にしても，推論で前提（仮定）や結論の正当性を検討することも大切あるが，前提から結論を導く過程が妥当であるか，どうか（推論の有効性）を検討することも重要である．

しかし，小学校で推論で予想した事実が正しいかどうかを演繹的に証明することは勿論，論理的推論の有効性を検証するなどということは不可能である．

算数科教育研究[注15]（学芸図書）P 138に次のように書かれている．

〈補充問題３〉　次の推論は正しいか．またこれと同じような例をあげよ．
「ひし形の対角線は直角に交わる．だがこれはひし形でないから，対角線は直角に交わらない．」（中学年）

本学で教職課程の算数教材の科目を受講している学生に対し，その期末試験に

次の推論は正しいか，正しくないか理由を述べて答えよ．
「ひし形の対角線は直角に交わる．だがこれはひし形でないから，対角線は直角に交わらない」

と出題したところ，解答は
(1)　正しくない（74％）
　理由
　・ひし形でなくても正方形の対角線は直角に交わる．（29％）
　・ひし形でなくても（たこ形など）対角線は直角に交わるものがある．（11％）
　・理由については無答（60％）
(2)　正しい（26％）
　・長方形はひし形でないから，対角線は直交しない．など　（88％）
　・理由については無答　（12％）
として返って来た．

この結果から考えられることは，

①大部分の学生（殆んど全員）が，推論が正しいとか正しくないとかの意味（論理的推論の有効性の検証）が理解できていない．
　・推論における前提（仮定）と結論が分かっていない．
　・前提や結論の命題の真，偽は推論の有効性のための必要条件でもなく，十分条件でもないということも分かっていない．
　・命題の裏命題をつくるという（推論）が正しくない（有効でない）理由が分かっていない．

②ひし形の意味（定義）が分かっていない者が多い．

③平行四返形，長方形，ひし形，正方形などの図形の相互関係が分かっていない者が多い．

④正しくない（命題が偽ー成り立たない）理由を述べるのには，反例を１つあげればよいが，正しい（命題が真ー成り立つ）理由を述べるのには，成り立ついくつかの例をあげても証明したことにはならない．ということの理解ができていない者が多い．

算数教育で扱う推論は**帰納的推論**（四則演算の演算法則：交換法則，結合法則，分配法則を導いたり，三角形の内角の和が180°であることを導いたり，$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$を導いたりするのは演繹的推論で行うのではなくて，具体的な操作活動などと関連して帰納的推論をさせるのである）が多く，また類比的推論や統計的推論も扱うけれども，演繹的推論の検証のようなことは考えられないし，**推論で予想した結論が，いつも正しい**と思いこむことのないよう注意して指導する必要がある．

教育の現場では，児童に対し，推論などという用語は使用しない方がよい．

中学校数学では図形教材を用いるなどして，**演繹的推論**を扱い，「pであるならばqである」ということは，二つのことがらp，qがあってpが成り立つときqが成り立つことで，これを$p \rightarrow q$と表しpを仮定qを結論という．この仮定pから結論qを導くこを**推論という**．[注6]と指導し，背理法なども教えるが，$p \rightarrow q$を条件文命題としてではなくて，含意の関係（$p \Rightarrow q$）を表すものとして考えている．

したがって，仮定（前提）が真であるとしたときに推論が正しい（有効な推論）なら結論も真であり，**仮定（前提）が真であるのに結論が偽であれば推論は正しくないといえる**．しかし，前述の謬論（例2′）の（2′）――②のように，**仮定（前提）が真で，結論も真だから，推論は正しい（有効な推論）**とはいえないのである．

前述の
「ひし形の対角線は直角に交わる．これは，ひし形でないから対角線は直角に交わらない」という推論は，
真である仮定p「ひし形の対角線は直角に交わる．これは，ひし形でない」に対し，結論q「この（ひし形でない四角形）対角線は直角に交わらない」が偽だから推論は正しくないのである．
〔謬論の例2′の（2′）――①〕

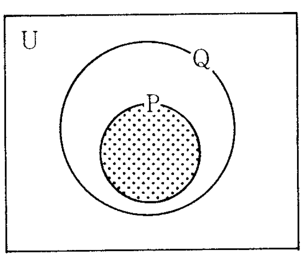
教師としては，推論が正しい（有効な推論）ということと，結論の（命題が）正しいということとの区別は，はっきりと意識して指導しなければならないと考える．また結論や仮定の真・偽の決定は中学校の数学では述語論理でないとできないから，推論が正しいか，どうか（有効性の検証）も，述語論理で行うことである．

高等学校数学Ⅰでは**数学論理**として，命題，命題の真・偽，合成命題「pかつq」・「pまたはq」・「pでない」・「pならばq」，存在命題「あるxに対して$p(x)$」，全称命題「すべてのxに対して$p(x)$，必要条件，十分条件，逆命題，裏命題，対偶命題，などを指導し，論理記号としては，否定（～またはpの否定を$\bar{p}$）記号と条件文命題記号（pならばqを$p \rightarrow q$）を用い，合接記号（$\wedge$）や離接記号（$\vee$）や存在記号（$\exists x$）や全称記号（$\forall x$）は使用していないのが普通である．記号$\Rightarrow$は条件文命題$p \rightarrow q$がトートロジーであるときに用いる超論理の記号であることに留意して，条件文命題は「pならばq」と表し（記号$\rightarrow$は使用しない），条件文命題「pならばq」においてpがqを導く（含意の関係）とき「$p \Rightarrow q$」と表し（記号$\Rightarrow$を使用）ている教科書も[注7]ある．

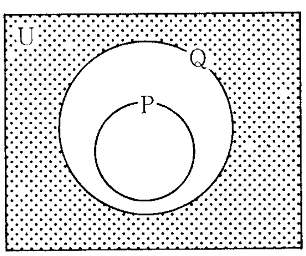
いずれにしても，高等学校の数学論理の程度では一般的に論理的推論の検証を論ずることは困難であるが，命題にはその真理集合を対応させ，オイラーの図を用いれば，演繹的推論の検証を行うこともできる．

全体集合をUとし，円Pの内部（境も含む）は命題pが真である点の集合，外部は命題pが偽（$\sim p$）の点の集合$\bar{\mathrm{P}}$とすれば，有効な推論$p \Rightarrow q$は集合の包含関係$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{Q}$に対応する．

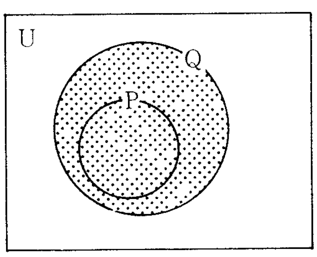
（例1）　推論「p（仮定）ならばq（結論）」が正しい．（図1）「$p \Rightarrow q$」



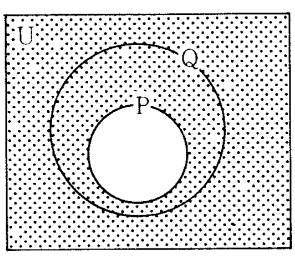
[図1]



[図2]



[図3]



[図4]

（例２）　推論「$p \Rightarrow q$であって，qでない（仮定）ならばpでない（結論）」は正しい．（図２）

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

（例３）　推論「$p \Rightarrow q$であって，qである（仮定）ならばpである（結論）」は正しくない．

（図３）斜線部分の領域で，Ｐの円内に含まれない部分がある．

$(p \Rightarrow q) \not\Rightarrow (q \Rightarrow p)$

（例４）　推論「$p \Rightarrow q$であって，pでない（仮定）ならば，qでない（結論）」は正しくない．

（図４）斜線部分の領域で，Ｑの円内に含まれない部分がある．

$(p \Rightarrow q) \not\Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

しかし，このようにして推論の有効性が検証できるのは，仮定がすべて真（前提の命題の合接が真）であるときであって，仮定が偽であるときに，一般に推論の有効性を検証することは図では困難である．[注8]

大学（教職課程……教員免許取得）の数学では，前述の**論理的推論**程度の履修は必要であり，推論の**有効性の検証**もできなければならないと思う．

参　考　文　献

（注１）梅沢敏郎，記号論理，筑摩書房，(1970) P. 14.

（注２）吉田洋一・赤攝也，数学序説，培風館，(1978) PP. 243−244

（注３）John G. Kemeny　J. Laurie Snell　Geraid L. Thompson, Introduction to Finite Mathematics, 3rd Edition, PRENTICE-HALL, INC.　(1974)　PP. 31−42

（注４）日本数学教育学会，算数教育指導用語辞典，新数社，(1984)　P　46

（注５）算数教育学研究会，算数科教育研究，学芸図書，(1983)　P. 138

（注６）林真護，高校における数学的論理，数学教育No183，明治図書（1975）PP. 54−62

（注７）赤攝他編，数学Ⅰ，学習研究社，(1990)

（注８）林真護，論理の指導における対偶命題の証明に関して，日本数学教育学会誌59巻５号（1975）