Valencyが等しい2-class Association Schemesについて

岩根博之

Strongly Regular Graphs with same valencies having p^n vertices

Hirosi Iwane

Abstract

Let Ω be a commutative 2-class association scheme We view Ω as a strongly regular graph We can calculate eigenvalues and the multycityies of the strongly regular graphs that have the same valencies and p^n vertices, where p is odd prime As a consequence of calculating the multiplicity we obtain that the number of vercitices is p^{4k}, where p is odd prime

1. Introduction

Γを頂点の集合$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$と頂点の向きのないpairの集合（辺と呼ばれるを$E\Gamma$とする時，pairの集合（$V$, $E\Gamma$）をgraphと呼ぶ．このgraphにたいしてstrongly regular graphと呼ばれるgraphが定義される．このgraphは隣接行列を考えることで2-class association schemeと密接に関係している Strongly regular graphの存在と2-class association schemeの存在とは同値になる（[3]，[4]）．

そこで頂点の個数やvalencyなどに条件をつけて隣接行列の固有値及びその重複度を計算するという代数的手法と重複度が整数になることを用いてある種のstrongly regular graph非存在を示すことができる．頂点の個数が奇素数の時は決定ずみである（[6]）．absolute boundを考慮すると点の個数がp^n，$n \leq 7$，でvalencyがおなじで重複度が異なる2-class association schemeは存在しない

2. Strongly Regular GraphとAdjacency Matrix

Graph（V, $E\Gamma$）にたいして（v_1, v_j）$\in E\Gamma$ならばv_iとv_jは結ばれていると呼ぶことにする．iを固定した時（v_i, v_j）$\in E\Gamma$となるjの個数をv_iのdegreeと呼ぶ．degreeが頂点の選び方によらない一定の値をとる時graph Γはregular graphと呼ばれる．さらに下記の定義1を満たすときにstrongly regular graphと呼ばれる（[3]，[4]参照）

定義　1

グラフΓがstrongly regular graphであるとは次の条件をみたすとき

1. regular graphである
2. （v_i, v_j）$\in E\Gamma$のとき
   $\lambda = |\{k \mid (v_i, v_k) \in E\Gamma\ (v_j, v_k) \in E\Gamma\}|$が$v_i$, v_jの選び方によらない．
3. （v_i, v_j）$\in E\Gamma$のとき

$\mu = |\{k \mid (v_i,\ v_k) \in E\Gamma\ (v_j,\ v_k) \in E\Gamma\}|$が$v_i$, v_jの選び方によらない

定義 2

グラフΓの隣接行列（adjacency matrix）とは$v \times v$（vは頂点の個数）の行列で成分が

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{と} v_j \text{が結ばれている} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定義される行列

R_0：自分自身 R_1：頂点が結ばれている R_2．頂点が結ばれていない という関係を考える集合Vと上の関係R_0 R_1 R_2で2 classのassociation schemeができる strongly regular graphと2 classのassociation schemeとは同じことになる

$v =$（Vの個数） $k_1 =$（グラフΓのdegree）と置く

k_1がR_1のvalencyになる

A_1を上の隣接行列，Iを単位行列，Jをall 1の行列とし，$A_2 = J - I - A_1$とする．次の関係式が成り立つ．

$$A_1^2 = k_1 I + \lambda A_1 + \mu A_2$$

この関係式でstrongly regular graphと2-class association schemeが同じものになる

A_1の固有値を k_1（自明），r，sとし，重複度1，m_r，m_sとおく各パラメータの基本的な関係式は次のようになる （[3]）

$$v = 1 + k_1 + k_2 \quad n = 1 + m_r + m_s$$
$$0 = k_1 + rm_r + sm_s$$
$$vk_1 = k_1^r + r^r m_r + s^r m_s$$

そこで $v = p^n$（p奇素数）$k_1 = k_2$，$m_r \neq m_s$とおくとつぎのLemmaが成り立つ

Lemma

2-class Association schemeで$n = p^t$（pは奇素数），$k_1 = k_2$，$m_r \neq m_s$ならば$t \equiv 0 \pmod 4$である．

3．Lemmaの証明

Lemma

2-class association schemeで$v = p^t$（p奇素数），$k_1 = k_2$，$m_r \neq m_s$ならば$t \equiv 0 \pmod 4$である

証明

$v = p^n$を頂点の個数，隣接行列をA_1とし，Iを単位行列 Jをすべて1の行列として，

$A_0 = I$，A_1，$A_2 = J - I - A_1$，A_1とA_2のvalencyをk固有値をr，s（$r \geqq s$）とおく．

$A_1^2 = kA_0 + \lambda A_1 + \mu A_2$とする

$D = (2\lambda + 2 - k)^2 + v$，$\alpha = 2\lambda + 1 - k$とおくと固有値は $r = (\alpha + \sqrt{D})/2$，$s = (\alpha$

$-\sqrt{D}/2$と表される．$m_r \neq m_s$から$\sqrt{D}=-2k_1(1+\alpha)/(m_r-m_s)$となり$\sqrt{D}$が有理数で固有値は代数的整数だから$l=(2\lambda+1-k\pm\sqrt{D}/2$ `lは整数となる．$\pm\sqrt{D}=2l-2\lambda-1+k$で，$k$が偶数だから$\sqrt{D}=2t+1$，$t$は整数となる．$v=(2t+1)^2-(2\lambda+2-k)^2$と表せる．

$$2t+3+2\lambda-k=A \quad (1)$$

$$2t-1-2\lambda-k=B \quad (2)$$

(3)

とおくと　$v=p^n$から　$A\cdot B=p^n$で　A，Bは整数　pが素数だから　AもBもpのべきになる．

$(A, B)=(p^l, p^{n-1})$とする．

固有値は

$$r=(p^l-1)/2 \quad s=(-p^{n-1}-1)/2$$

重複度は

$$mr=(p^n-1)/(p^{2l-n}+1) \quad m_s=(p^n-1)/(p^n-1)/(p^{n-2l}+1)$$

と表せる．

$l=0$，$l=n$のとき重複度が整数にならない．

$l\neq 0$，$n-l\geq l$とおいてよい．　$u=n-2l$とおく，$n=s\cdot u+a\,(a<u)$とおいて重複度を書き直す．

$$(p^{s\cdot u+a}-1)/(p^u+1)$$

$(p^{us}p^a-1)/(p^u+1)$となり$(((p^u+1)-1)^s)p^{a-1})$の展開を考える．

$\Sigma_{j=0}^{s}\binom{s}{j}(p^u+1)^j(-1)^{s-j}p^a-1$

となり，m_rとm_sが整数になることから$j\geq 1$ならば(p^u+1)で割り切れ，残るのは$(-1)^s p^a-1$で$((-1)^s p^a-1)/(p^u+1)$なくなるはず．$a=0$でsは偶数になる　$s=2t$　$t\in z$となり，$n=2tu$から$u=2tu-2l$で，$2l=u(2t-1)$からuも偶数になり，nは4の倍数になる．

Remark

$v=p^4$の時，(A, B)として(p, p^3)，(p^2, p^2)，(p^3, p^1)がでてくる．(p^1, p^3)のときだけ調べればよい．(p^2, p^2)は重複度が同じになる．(p^1, p^3)の時重複度は$m_r=(p_4-1)p^3/(p^3+p)$と(p^2-1)になる．

Theorem (Absolute bouund condition) ([6]を参照)

$\Omega=(X, \{R_1\}_{0\leq i\leq d})$を commutative association scheme class d とするとき，

$m_i=rank(E_i)$とおくと，

$$|X|\leq\binom{m_i+d-1}{d}+\binom{m_i+d-2}{d-1}$$

$d=2$とし$m_i=(p^2-1)$を代入すると，$(p^4+p^2-2)/2$となり，Theoremが成立しない．

$v=p^4$の時，Valencyが同じで 重複度が異なる2-classの commutative associatin schemeは存在しない．

参　考　文　献

1) X L Hubaut "Strongly regular graphs", Discrete Math13 (1975), 357-381

2) P Delsarte "An Algebraic approach to the association scheme of Coding theory" Philips RES Repport 10 (1973)
3) N Biggs "Algebraic Graph Theory", Cambridge UNIV press (1974)
4) Seidel J "Strongly regular graphs", Surveys in Combinatorics (Cambridge U P) (1979)
5) Bannai and Ito "Algebraic Combinatrics I", Benjamin (1984)
6) A Brouwer, A Cohen, A Neumaier "Distance Regular Graphs" Springer Verlag 1989
7) P Terwilliger J Algebraic Combinatrics 1 (1992), 363-388