名古屋女子大学　紀要　44（家・自）121〜125　1997

頂点の個数がp^2の Strongly Regular Graphのvalency

岩　根　博　之

On valency of Strongly regular graph with p^2 vertices

Hirosi IWANE

Abstract

A graph Γ is called strongly regular, if each vertex is adjacent to k vertices, each adjacent pair of vertices has λ between vertices, each non-adjacent pair of vertices has μ between vertices. In this paper we study the valency of the strongly regular graph with p^2 vertices, where p is an odd prime.

1．Introdction

グラフのなかに Strongly regular graph と呼ばれるグラフがあります．この Strongly Regular Graph の研究は J.J. Seidel，van Lint, J.M.Goethals らによるものがあります，

さらによく知られている Strongly regular graph の具体的な構成方法については，X. Hubaut（[5]）に一覧表があります．この一覧表は，すべての Strongly regular graph を含んでいるわけではありません．主なものは有限体上のベクトル空間にいろいろな内積をいれて直交関係を使ってグラフを構成します．そのため頂点の個数が p^n-1 のものがよく分類されています．他の組み合わせ論との関係では Strongly regular graph の隣接行列を考えることで2−class association scheme の存在と同値になります．また現在活発に研究されている Distance regular Graph の直径が 2 の場合にあたり，小さすぎるためにか Distance regular Graph の一般論からははずれた位置にあるグラフです．この Storngly Regular Graph の存在，非存在，構造を調べるのにその隣接行列の固有値，固有値の重複度，グラフの valency などの関係式，それから導かれる Krein condition や重複度が整数になることがつかえます．そこで隣接行列の固有値の性質を調べてみることが重要になると思われます．そこで頂点の個数が奇素数のときはパラメータとしては唯一つ決定できます．奇素数の 2 乗の場合に固有値の一つでもあり graph の基本的なパラメータでもある valency についての条件を調べてみました．

2．Strongly Regular graphs と Association Schemes

Strongly regular graph の定義　頂点の集合 $V=\{v_1v_2,\cdot\cdot\cdot,v_n\}$ とし 2 個の頂点からなる部分集合を E とするときに，$\Gamma=(V,E)$をグラフと呼びます。(v_i, v_j) がEに属するときv_i

とv_jが結ばれているということにします．一つの頂点から結ばれている頂点の個数をその頂点の valency と呼びます．すべての頂点の valency が等しいときに正則グラフと呼びます．さらにグラフΓが次の３つの条件みたすときに Strongly Regular Graph と呼ばれます．

i．正則グラフである．

ii．v_iとv_jが結ばれているときv_iとv_jの両方に結ばれている頂点の個数がv_i v_jによらず一定のλ個になる．

iii．v_iとv_jが結ばれてないときv_i v_jの両方に結ばれている頂点の個数がv_i v_jによらず一定のμ個になる．

正則グラフのみ考えていきますので頂点の総数をn，valency をkとおきさらに自明な場合をのぞくため$\mu>0$とします．
そこでグラフを代数的に扱うために隣接行列と呼ばれる行列を使います．それは次のように定義されます．
グラフΓの隣接行列Aとは行と列が頂点でパラメータ化された$(0,1)$-行列で(i,j)成分が$v_i v_j$が結ばれているとき，１そうでないとき０とする行列です．
Iを単位行列，Jをすべて１の行列とします．valency kの正則グラフになることから，$AJ=kJ$で valency kは固有値になりkのことを自明な固有値とも呼びます．
グラフΓが Strongly regular graph になることは次の式が成り立つことと同値になります．

$$A^2=kI+\lambda A+\mu\ (J-I-A)$$

Aの固有値を k（valency），r，s とおき重複度を１，m_r，m_sとします．$l=n-1$とおき tr$A=0$と行列としての関係式 $(A-rI)\ (A-sI)=\ (k+rs)\ J$，$AJ=kJ$から次の関係式が成り立ちます．

$$1+\mathrm{m}_r+\mathrm{m}_s=\mathrm{n} \qquad 1+k+l=n$$
$$k+m_r r+m_s s=0 \qquad k^2+r^2m_r+s^2m_s=nk$$
$$k(k-1-\lambda)=l\mu \qquad \lambda-\mu=r+s$$
$$\mu=k+rs=(k-r)(k-s)/n \qquad nkl=(r-s)^2m_r m_s$$

これらの関係式からグラフの性質のλ，μから固有値r,sが計算できます．n,k,r,s,m_r，m_s，λ，μらをグラフΓのパラメータと呼ぶことにします．
固有値には自明な場合除くと$k>r>0>s>-k$という関係があります．rとsは固有値であることと $\mathrm{m}_r\neq\mathrm{m}_s$ なら有理数であることから次の重要な Lemma が成り立ちます．

Lemma1 m_r m_s ならば固有値r,とsは整数になる．

重複度と valency との関係では次の定理が成り立ちます．（[7]）

定理　　$m_r=m_s$ならば $k=l$

この定理の逆は成り立ちません．反例は Johnson scheme $J(7,2)$が唯一知られています．

また$B=J-I-A$ adjancey matrix とするグラフが定義でき補グラフと呼ばれています．もとのグラフが Strongly regular graph ならば補グラフもまた Strongly regular graph にな

ります.補グラフのパラメータは$\bar{k}=n-k-1$, $\bar{r}=-s-1$, $\bar{s}=-r-1$, $\bar{\lambda}=n-2k-2+\mu$, $\bar{\mu}=n-2k+\lambda$と決定できます
(I,A,B) でcommutative algebraが生成でき2-class Symmetric Association Schemeになります. そこで原始巾等元E_0, E_1, E_2がとれて (I,A,B) と同型のalgebraを生成します. そこで行列のアダマール積を使うことで

$$E_i * E_j=(q_{ij}^0 E_0+q_{ij}^1 E_1+q_{ij}^2 E_2)/n$$

と表したときにKrein conditionとは$q_{ij}^k \geqq 0$がなりたつことです. 2−classの場合q_{ij}^kはパラメータを使ってあらわせます. たとえば

$$q_{11}^1=m_r^2(1+r^3/k^2-(r+1)^2/(n-k-1)^2/n^2$$

というふうに表せます. そこでパラメータあたえられた時にKlein condition を使って非存在を示すことができます.

3. 頂点の個数が奇素数の2乗の場合

最初に頂点の個数が奇素数のStrongly Regular Graphしてよく知られているものとして, Paley Graphと呼ばれるグラフがあります. 次のように定義されます.

*Paley Graph: (有限体$GF(p)$のcyclotomic association schemeの一つ)
有限体$GF(p)$, の元にa, bにa−b= (平方数)の時にaとbを結ぶと定義してつくれるグラフ.

頂点の個数が奇素数の2乗の場合のStrongly Regular Graphのよく知られた例を3個あげます.

*Hamming scheme $H(2,p)$: Xはp個の元からなる集合としX×X (直積) の元 $a=(a_1, a_2)$ $b=(b_1, b_2)$ にたいして$\#\{i \mid a_i \neq b_i\}=1$のとき$a$と$b$をむすぶ.
*$GF(p^2)$のcyclotomic Association schemeのclass 2:Paley Graph 有限体GF(p^2) の場合
*Latian方陣からの構成:$p \times p$のLatian方陣Lとし$\alpha=(i,j,\alpha_{i,j})$ $\beta=(k,l,a_{k,l})$, $\alpha_{i,j}$はLの (i,j) 成分で, i=k or j=l or $a_{ij}=a_{kl}$のときαとβをむすぶ.

頂点の個数がp^2のStrongly regular graphのパラメータの表

	k	r	s	m_r	m_s
H(2, p)	$2(p-1)$	$p-2$	-2	$2(p-1)$	p^2-1
$GF(p^2)$のcycltomic scheme···	$(p^2-1)/2$	$(p-1)/2$	$(-p-1)/2$	$(p^2-1)/2$	$(p^2-1)/2$
Latian方陣から···	$4(p-1)$	$p-4$	-4	$4(p-4)$	p^2-4p+3

*GF (p^2) のcyclotomic schemeの$GF(p^2)$には2乗して−1になる元を含みます.
*X. Hubautの表とは隣接行列が異なるため数値がずれますが本質的には同じことです.

頂点の個数が奇素数のときはパラメータとしてはPaley Graphに限られます．固有値はk $=(p-1)/2, r=(-1+\sqrt{p})/2$，$s=(-1-\sqrt{p})/2$になり，重複度 *valency* は同じ$(p-1)/2$になります．
頂点の個数がp^2個の場合については，次のようなLemmaが成り立ちます．

Lemma 1　頂点の個数が$n=p^2$のStrongly Regular Graphのvalencyをkとし固有値をr，sとしその重複度をm_r, m_sとおくと

$$m_r \neq m_s \text{ ならば } k-r \equiv 0 \pmod{p},\ k-s \equiv 0 \pmod{p}$$

証明の概略

$m_r \neq m_s$のとき固有値r，sは整数になります．kとr，s間の関係式$p^2k(n-k-1)=(r-s)^2 m_r m_s$，と$m_r<p^2$，$m_s<p^2$，$1+m_r+m_s=p^2$から$m_r\ m_s$の両方が$p$で割り切れることはなく$(r-s) \equiv 0 \pmod{p}$となります．$k+rm_r+sm_s=0$と$1+m_r+m_s=p^2$から$k-r\equiv 0 \pmod{p}$，$k-s\equiv 0 \pmod{p}$が導けます．

Lemma 2　頂点の個数が$n=p^2$のStrongly Regular Graphのvalencyをkはpの倍数ではない．
証明：$k\equiv 0 \pmod{p}$とするとLemma 1から$r\equiv 0$で$\pmod{p}$，$s\equiv \pmod{p}$になるから$k=tp, r=up, s=vp$（t,u,vは整数）とおけます．$p>t>u>0$，$p>t>-v>0$で$\mu=k+rs(k-r)(k-s)=\mu p^2$から$(t-u)(t-v)=\mu=(t+uvp)$　pが成り立ち$p>t-u>0$から$t-v=p$から$t-u=t+uvp$となり$0=u(1+vp)$で矛盾がでます．故に$k\neq 0 \pmod{p}$になる．

頂点の個数の条件からだけStrongly Regular graphの一般的な固有値の性質を導きだすことは困難と思われます．頂点の個数をp^2個にしたときは，このLemma 2と$m_r=m_s$のときは$r+s=-1, rs=(1-p^2)/2$から$r=(-1+p)/2, s=(-1-p)/2$，$\lambda=(p^2-5)/4$，$\mu=(p^2-1)/2$と計算でき$GF(p^2)$のcyclotomic assocation schemeとして構成したものと同じパラメータになることから　次のようなことが成り立ちます．

定理　頂点の個数がp^2個のStrongly Regular Graphのvalency k固有値をr，sとおくと$r-s$はpの倍数になり，さらにvalencyのkはpの倍数ではない．

頂点の個数がp個のときはパラメータとしては一意的にPaley Graphからのものと同一なものとして決まります．p^2個の場合も一意的に決まらないまでもなんらかの条件があって分類が可能ではないかと考えられます．

参考文献

[1] R.C. Bose. "Strongly regular graphs, patial geometries, and partially balalnced designs." Pacific J.Math.13(1963), 389-419

[2] R.C.Bose and D.M. Menser. "On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced esigns." Ann.Math.Statist 30(1959), 21-38

[3] P.J.Cameron J.M.Goethals J.J.Seidel" Strongly Regualar Graphs Having StronglyRegular Subconstituents". J.Algrbra 55 257-280

[4] J.J.Seidel. "Strongly regular graphs". London Math.Soc Lecture Note Ser38

[5] X.Hubaut "Strongly regular graphs". Discrete Math 13 357-381

[6] A.E.Brouwer A.M.Cohen A.Neumaier. "Distance-Regular Graphs". Springer-Verlag

[7] Bannai and Ito: "Algebraic Combinatrics I". Benjamin (1984)

[8] N.Biggs: "Algebraic Graph Theory". Cambridge UNIV pres (1974)

[9] C.L.M. de Lang "Some New Cyclotomic Strongly Regular Graphs". J. Algebraic Combinatorics 4 (1995)